

Definiamo anche l'operazione di potenza.



A **power** is the result obtained by the *repeated multiplication* of a natural number by itself.

DEFINIZIONE	<p>Potenza</p> <p>Se a e n sono numeri naturali:</p> <ul style="list-style-type: none"> $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}} \quad \text{se } n > 1;$ $a^0 = 1 \quad \text{se } a \neq 0;$ $a^1 = a.$ <p>Non si definisce 0^0.</p>	ESEMPIO
	<p>si legge: «tre alla quarta»</p> $3^4 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{4 \text{ volte}} = 81$ $26^0 = 1$ $9^1 = 9 \qquad 0^1 = 0$	

Nella potenza a^n , a è la **base**, n è l'**esponente**.

ESPRESSIONI Esercizi a pagina 18

Un'espressione con i numeri naturali indica un insieme di operazioni da svolgere in un ordine preciso.

Nel calcolo, la potenza ha la precedenza su tutte le altre operazioni.

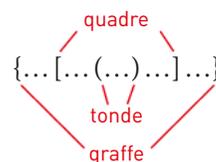
Moltiplicazioni e divisioni hanno la precedenza su addizioni e sottrazioni.

Le precedenze possono essere cambiate utilizzando parentesi. Vanno svolti prima i calcoli relativi a operazioni fra parentesi tonde, poi quelli fra parentesi quadre e per ultimi quelli fra parentesi graffe.

Per **semplificare** un'espressione, eseguiamo i calcoli, seguendo le precedenze, e poi la sostituiamo con un'espressione più semplice che ha lo stesso valore. Ripetiamo il procedimento fino a giungere al risultato.

$$5^3 = 125$$

base



ESEMPIO	<p>Semplifichiamo l'espressione $4 \cdot [3 + 2 \cdot (7 - 4)]$.</p> $4 \cdot [3 + 2 \cdot (7 - 4)] = 4 \cdot [3 + 2 \cdot 3] = 4 \cdot [3 + 6] = 4 \cdot 9 = 36$ <p style="text-align: center;"> prima l'operazione nelle tonde prima la moltiplicazione prima l'operazione nelle quadre </p>
---------	--

È anche possibile considerare **espressioni letterali**, in cui le lettere sono dette **variabili**, nome che indica che al posto di ognuna di esse possiamo sostituire numeri che possono cambiare di volta in volta.

$$3a + 1$$

variabile

espressione letterale

ESERCIZI PER COMINCIARE

1 **ANIMAZIONE** Dati i numeri a e b , scrivi in simboli le seguenti espressioni, calcolando poi il loro valore per i valori assegnati ad a e b .

- La differenza fra il cubo di a e il cubo del doppio di b ; $a = 3$, $b = 1$.
- La somma del triplo prodotto di a e b e del doppio della loro differenza; $a = 5$, $b = 4$.
- Il prodotto fra il quadrato della somma di a e b e la somma dei loro quadrati; $a = 1$, $b = 2$.

2 **VIDEO** **Dalle parole alle espressioni** Scrivi in simboli l'espressione: «Dati due numeri a e b , al doppio del successivo di a aggiungi il prodotto tra il quadrato del precedente di b e 8». Calcola il valore dell'espressione per $a = 7$ e $b = 11$.

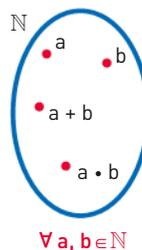
Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.

2. PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

➔ Esercizi a pagina 25

Proprietà dell'addizione e della moltiplicazione

L'addizione e la moltiplicazione sono **operazioni interne** all'insieme \mathbb{N} perché la somma e il prodotto di due numeri naturali sono sempre numeri naturali. Diciamo anche che \mathbb{N} è **chiuso** rispetto all'addizione e alla moltiplicazione.



0 è l'**elemento neutro** dell'addizione, perché sommando 0 a un numero qualsiasi si ottiene come risultato il numero stesso.

- ▶ $5 + 0 = 5$; $0 + 7 = 7$; $4 + 0 = 4$; $0 + 9 = 9$; ...

1 è l'**elemento neutro** della moltiplicazione, perché moltiplicando 1 per un numero qualsiasi si ottiene come prodotto il numero stesso.

- ▶ $6 \cdot 1 = 6$; $1 \cdot 8 = 8$; $11 \cdot 1 = 11$; $1 \cdot 3 = 3$; ...

0 è l'**elemento assorbente** rispetto alla moltiplicazione, perché moltiplicando 0 per un numero qualsiasi si ottiene come prodotto 0.

- ▶ $0 \cdot 15 = 0$; $132 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 2 = 0$; $100 \cdot 0 = 0$; ...

D'altra parte, se il prodotto di due numeri è 0, almeno uno dei due fattori deve essere 0. Esprimiamo in modo sintetico queste proprietà dello zero con la seguente legge.

$$a + 0 = 0 + a = a$$

elemento neutro

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

elemento neutro

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

elemento assorbente

PROPRIETÀ

Legge di annullamento del prodotto

Il prodotto di due fattori è 0 se e solo se almeno uno dei fattori è 0.

$$a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \text{ o } b = 0$$

Per l'addizione e la moltiplicazione vale la proprietà commutativa.

PROPRIETÀ

Proprietà commutativa dell'addizione

Cambiando l'ordine degli addendi, la somma non cambia.

$$a + b = b + a$$

ESEMPIO

$$3 + 2 = 2 + 3$$

Proprietà commutativa della moltiplicazione

Cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$7 \cdot 4 = 4 \cdot 7$$

Per l'addizione e la moltiplicazione vale anche la proprietà associativa.

PROPRIETÀ

Proprietà associativa dell'addizione

La somma di tre numeri non cambia se associamo diversamente gli addendi.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

ESEMPIO

$$(5 + 9) + 1 = 5 + (9 + 1)$$

Proprietà associativa della moltiplicazione

Il prodotto di tre numeri non cambia se associamo diversamente i fattori.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$(2 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3)$$

Le proprietà commutativa e associativa possono essere utili nel calcolo a mente.

$$\begin{aligned} \triangleright 7 + 8 + 3 + 2 &= 7 + (8 + 3) + 2 = 7 + (3 + 8) + 2 = (7 + 3) + (8 + 2) = 10 + 10 = 20 \\ 2 \cdot 9 \cdot 5 &= (2 \cdot 9) \cdot 5 = (9 \cdot 2) \cdot 5 = 9 \cdot (2 \cdot 5) = 9 \cdot 10 = 90 \end{aligned}$$

associativa
commutativa
associativa

associativa
commutativa
associativa

Vale inoltre la seguente proprietà distributiva.

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

Il prodotto di un numero per una somma è uguale alla somma dei prodotti fra il numero e ognuno degli addendi.

La proprietà è distributiva a sinistra e a destra a seconda della posizione del fattore rispetto alla somma.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{distributiva a sinistra}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{distributiva a destra}$$

$$5 \cdot (2 + 3) = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \quad \text{distributiva a sinistra}$$

$$(4 + 5) \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 \quad \text{distributiva a destra}$$

Se leggiamo una delle uguaglianze che esprimono la proprietà distributiva da destra verso sinistra, abbiamo un **raccoglimento a fattore comune**:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Valgono inoltre le seguenti leggi di monotonia, per le uguaglianze e per le disuguaglianze.

$$7 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = 7 \cdot (3 + 5)$$

fattore raccolto

fattore comune

Prima legge di monotonia

Aggiungendo uno stesso numero naturale ai due membri di un'uguaglianza o di una disuguaglianza, otteniamo un'uguaglianza o una disuguaglianza con lo stesso verso.

$$a = b \leftrightarrow a + c = b + c;$$

$$a < b \leftrightarrow a + c < b + c; \quad a > b \leftrightarrow a + c > b + c.$$

stesso verso

stesso verso

$$4 = 3 + 1 \leftrightarrow 4 + 8 = (3 + 1) + 8$$

$$5 < 2 \leftrightarrow 5 + 6 < 2 + 6$$

$$12 > 3 \leftrightarrow 12 + 7 > 3 + 7$$

Seconda legge di monotonia

Moltiplicando per uno stesso numero naturale *diverso da zero* i due membri di un'uguaglianza o di una disuguaglianza, otteniamo un'uguaglianza o una disuguaglianza con lo stesso verso.

Con $c \neq 0$:

$$a = b \leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c;$$

$$a < b \leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c; \quad a > b \leftrightarrow a \cdot c > b \cdot c.$$

stesso verso

stesso verso

$$6 = 9 - 3 \leftrightarrow 6 \cdot 5 = (9 - 3) \cdot 5$$

$$1 < 2 \leftrightarrow 1 \cdot 3 < 2 \cdot 3$$

$$8 > 7 \leftrightarrow 8 \cdot 3 > 7 \cdot 3$$

1 NUMERI NATURALI

Proprietà della sottrazione e della divisione

La *sottrazione* può essere definita come **operazione inversa** dell'addizione: la differenza di due numeri è quel numero che sommato al sottraendo dà il minuendo.

▶ $9 - 4 = 5$ perché $5 + 4 = 9$.

In \mathbb{N} la sottrazione *non* è un'operazione interna: è possibile eseguirla solo se il sottraendo è minore o uguale al minuendo.

La *divisione* è l'**operazione inversa** della moltiplicazione: il quoziente fra due numeri è quel numero che moltiplicato per il divisore dà il dividendo. *Il divisore deve sempre essere diverso da zero.*

▶ $14 : 2 = 7$ perché $7 \cdot 2 = 14$.

$9 : 0$ non viene definita — perché nessun numero moltiplicato per 0 può dare 9

$0 : 0$ non viene definita — perché qualsiasi numero moltiplicato per 0 dà 0

Anche escludendo 0 come divisore, in \mathbb{N} la divisione *non* è un'operazione interna.

▶ $23 : 5$ non ha risultato in \mathbb{N} , perché non esiste un numero naturale che moltiplicato per 5 dà 23.

È invece sempre possibile la **divisione con resto**, in cui la relazione fra dividendo a , divisore b , quoziente q e resto r è la seguente.

$$a : b = q \text{ con resto } r \leftrightarrow a = b \cdot q + r$$

Se $r = 0$, la divisione è **esatta** e diciamo che a è **divisibile** per b . Valgono i seguenti criteri di divisibilità.

<i>n</i> è divisibile per ...	se e solo se	
2	l'ultima cifra è divisibile per 2	1320; 2714; 316. <i>divisibili per 2</i>
3	la somma delle cifre è divisibile per 3	3642 $3 + 6 + 4 + 2 = 15$ e 15 è divisibile per 3
4 o 25	<i>n</i> termina con 00 o il numero formato dalle ultime due cifre è divisibile per 4 o per 25	3700; 2312; 7150. <i>divisibile per 4 e 25</i> <i>divisibile per 4</i> <i>divisibile per 25</i>
5	termina con 0 o 5	290; 375.
9	la somma delle cifre è divisibile per 9	2952 $2 + 9 + 5 + 2 = 18$ e 18 è divisibile per 9
11	la differenza fra la somma delle cifre di posto pari e quella delle cifre di posto dispari (o viceversa) è divisibile per 11	35607 $5 + 0 = 5$ $16 - 5 = 11$ e 11 è divisibile per 11 $3 + 6 + 7 = 16$

$$a - b = d$$

perché

$$d + b = a$$

$$5 - 8 = ?$$

non ha risultato in \mathbb{N}

con $b \neq 0$:

$$a : b = q$$

perché

$$q \cdot b = a$$

$$23 : 5 = 4 \text{ con resto } 3$$

perché

$$23 = 5 \cdot 4 + 3.$$

Per la sottrazione vale la proprietà distributiva della moltiplicazione.

PROPRIETÀ	<p>Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione</p> <p>Con $b \leq a$:</p> $c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b;$ $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c.$	<p>$3 \cdot (7 - 1) = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 1$ distributiva a sinistra</p> <p>$(12 - 3) \cdot 2 = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 2$ distributiva a destra</p>	ESEMPIO
------------------	--	---	----------------

Per la divisione vale la proprietà distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione, ma soltanto a destra.

PROPRIETÀ	<p>Proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione e alla sottrazione</p> <p>Con $c \neq 0$ e quando le sottrazioni e le divisioni sono possibili:</p> $(a + b) : c = a : c + b : c;$ $(a - b) : c = a : c - b : c.$	<p>$(6 + 8) : 2 = 6 : 2 + 8 : 2$ distributiva a destra</p> <p>$(15 - 9) : 3 = 15 : 3 - 9 : 3$ distributiva a destra</p>	ESEMPIO
------------------	--	---	----------------

Per la sottrazione e la divisione vale la proprietà invariantiva.

PROPRIETÀ	<p>Proprietà invariantiva della sottrazione</p> <p>La differenza fra due numeri non cambia se a ognuno si aggiunge o si toglie lo stesso numero.</p> <p>Quando le sottrazioni sono possibili:</p> $a - b = (a + c) - (b + c);$ $a - b = (a - c) - (b - c).$	<p>Proprietà invariantiva della divisione</p> <p>Il quoziente fra due numeri non cambia se ognuno viene moltiplicato o diviso per uno stesso numero diverso da 0.</p> <p>Con $c \neq 0$ e quando le divisioni sono possibili:</p> $a : b = (a \cdot c) : (b \cdot c);$ $a : b = (a : c) : (b : c).$
ESEMPIO	$32 - 4 = (32 + 6) - (4 + 6)$ $24 - 7 = (24 - 4) - (7 - 4)$	$120 : 40 = (120 \cdot 5) : (40 \cdot 5)$ $480 : 20 = (480 : 2) : (20 : 2)$

ESERCIZI PER COMINCIARE

1  **ANIMAZIONE** Completa le seguenti uguaglianze e scrivi la proprietà applicata.

a. $(14 + 8) + \square = \square + (8 + 9);$

d. $(60 + \square) : 4 = \square : 4 + 8 : \square;$

b. $\square \cdot (\square + 2) = 8 \cdot 5 + 8 \cdot \square;$

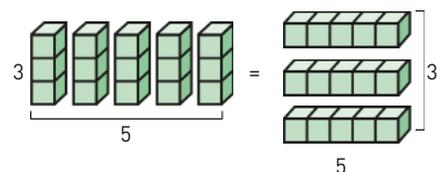
e. $(15 + \square) \cdot 4 = \square \cdot (15 + 3);$

c. $46 - \square = (46 + \square) - (18 + 2);$

f. $\square : 45 = (270 : 9) : (45 : \square).$

2  **VIDEO** **Le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione** Lo schema della figura interpreta graficamente la proprietà commutativa della moltiplicazione. Inventa altri schemi grafici che interpretino le proprietà commutativa e associativa dell'addizione, la proprietà associativa della moltiplicazione, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.

Confrontali con quelli che proponiamo nel video.



3. PROPRIETÀ DELLE POTENZE

➔ Esercizi a pagina 27



The **product of two powers with the same base** is a power with that base and exponent equal to the sum of the exponents.

Per le potenze valgono cinque proprietà.

PROPRIETÀ	<p>1. Prodotto di potenze con la stessa base Il prodotto di potenze con la stessa base è una potenza che ha la stessa base e come esponente la somma degli esponenti. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$</p>	$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
	<p>2. Quoziente di potenze con la stessa base Il quoziente di potenze con la stessa base è una potenza che ha la stessa base e come esponente la differenza degli esponenti. $a^m : a^n = a^{m-n}, \quad \text{con } a \neq 0 \text{ e } n \leq m$</p>	$12^5 : 12^3 = 12^{5-3} = 12^2$
	<p>3. Potenza di potenza La potenza di una potenza è una potenza che ha la stessa base e come esponente il prodotto degli esponenti. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$</p>	$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$
	<p>4. Prodotto di potenze con lo stesso esponente Il prodotto di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha lo stesso esponente e come base il prodotto delle basi. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$</p>	$4^2 \cdot 5^2 = (4 \cdot 5)^2 = 20^2$
	<p>5. Quoziente di potenze con lo stesso esponente Il quoziente di potenze con lo stesso esponente è una potenza che ha lo stesso esponente e come base il quoziente delle basi. $a^m : b^m = (a : b)^m, \quad \text{con } b \neq 0 \text{ e } a \text{ divisibile per } b$</p>	$6^2 : 3^2 = (6 : 3)^2 = 2^2$

ESEMPIO

Giustificiamo le proprietà considerando degli esempi in cui scriviamo le potenze come moltiplicazioni ripetute. Per gli esempi relativi alla seconda e alla quinta proprietà, utilizziamo la definizione della divisione come operazione inversa della moltiplicazione.

▶ Prima proprietà

$$3^2 \cdot 3^3 = (\underbrace{3 \cdot 3}_{2 \text{ volte}}) \cdot (\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \text{ volte}}) = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{2+3=5 \text{ volte}} = 3^5$$

▶ Seconda proprietà

$$\underbrace{2^6}_{a : b = q} : \underbrace{2^4}_{q \cdot b} = \underbrace{2^{6-4}}_a \text{ perché } \underbrace{2^{6-4}}_q \cdot \underbrace{2^4}_{b} = 2^{(6-4)+4} = 2^6$$

▶ Terza proprietà

$$(2^3)^4 = \underbrace{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3}_{4 \text{ volte}} = \underbrace{2^{3+3+3+3}}_{\text{prima proprietà}} = 2^{3 \cdot 4}$$

▶ Quarta proprietà

$$7^3 \cdot 2^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = (7 \cdot 2) \cdot (7 \cdot 2) \cdot (7 \cdot 2) = (7 \cdot 2)^3$$

proprietà associativa e commutativa

▶ Quinta proprietà

$$8^5 : 2^5 = (8 : 2)^5 \text{ perché } (8 : 2)^5 \cdot 2^5 = [(8 : 2) \cdot 2]^5 = 8^5$$

quarta proprietà

$$\underbrace{a : b = q} \quad \underbrace{q \cdot b = a}$$

Le proprietà valgono anche nei casi in cui la potenza non si può scrivere come moltiplicazione ripetuta.

Le definizioni di $a^0 = 1$ e $a^1 = a$ sono state date proprio per fare in modo che valga la seconda proprietà.

$$\underbrace{2^5 : 2^4 = 2} \text{ perché } \underbrace{2 \cdot 2^4 = 2 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)} = \underbrace{2^5}$$

D'altra parte, se vogliamo che valga la seconda proprietà delle potenze:

$$2^5 : 2^4 = 2^{5-4} = 2^1.$$

Confrontando i due risultati, deve essere:

$$2^1 = 2.$$

$$a^1 = a$$

$$\underbrace{3^4 : 3^4 = 1} \text{ perché } \underbrace{1 \cdot 3^4 = 3^4}$$

D'altra parte, se vogliamo che valga la seconda proprietà delle potenze:

$$3^4 : 3^4 = 3^{4-4} = 3^0.$$

Confrontando i due risultati, deve essere:

$$3^0 = 1.$$

$$a^0 = 1, \text{ con } a \neq 0.$$

ESERCIZI PER COMINCIARE

1 Calcola il risultato delle seguenti espressioni, indicando le proprietà delle potenze utilizzate.

- a. $2^3 \cdot 2^2$; c. $9^{13} : 9^{11}$; e. $(2^3)^2$; g. $2^4 \cdot 5^4$; i. $8^5 : 8^3$.
 b. $10^3 : 5^3$; d. $(12^5 : 12^4)^2$; f. $(7^2)^3 : 7^4$; h. $(3^4 : 3^3)^2 \cdot (3^7 : 3^5)^2$;

2 Applicando le proprietà delle potenze, scrivi il risultato delle seguenti espressioni come potenza di 2, di 3 o di 5.

- a. $8^3 : 2^4$; b. $25^5 \cdot 125^2$; c. 128^7 ; d. $81^2 : 9^3$; e. $256^2 \cdot 64^3$; f. $16^3 : 4^2$.

3  **ANIMAZIONE** Applicando le proprietà delle potenze semplifica la seguente espressione:

$$[(4^{13} \cdot 4^8) : 4^2] : (4^3)^6 + [(44^5 : 11^5) \cdot (16^2 : 4^3)^{13}] : 256^4.$$

4  **VIDEO** **Proprietà delle potenze** Semplifica la seguente espressione: $[(3^3 \cdot 2^7 \cdot 3^4)^3 : 6^{17}] : 3^4$.

Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.

4. MULTIPLI, DIVISORI, MCD, mcm

➔ Esercizi a pagina 29

📱 If a natural number a can be expressed as the number b times another number, then a is a **multiple** of b .

Multipli e divisori

DEFINIZIONE

Consideriamo i numeri naturali a e b . Se esiste un numero naturale q tale che $a = b \cdot q$, diciamo che:

- a è **multiplo** di b ;
- b è **divisore** di a .

...è multiplo di...

$$10 = 2 \cdot 5$$

...è divisore di...

ESEMPIO

I multipli di un numero sono infiniti e si ottengono moltiplicando il numero stesso per ognuno dei numeri naturali.

Invece, i divisori di un numero sono in numero finito.

- ▶ Multipli di 42: $42 \cdot 0$, $42 \cdot 1$, $42 \cdot 2$, $42 \cdot 3$, $42 \cdot 4$, $42 \cdot 5$, ...
- Divisori di 42: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.

DEFINIZIONE

Un numero naturale diverso da 0 e da 1 è un **numero primo** se ha come divisori solo se stesso e 1.

numeri primi

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...

ESEMPIO

Se un numero non è primo, esiste sempre ed è unica la sua **scomposizione in fattori primi** che possiamo ottenere con divisioni successive.

- ▶ $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

dividiamo per...

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

📱 If you have two or more natural numbers (different from zero), their **greatest common divisor** (GCD) is the largest natural number that divides them all, and their **least common multiple** (lcm) is the smallest natural number that is a multiple of all of them.

MCD e mcm

DEFINIZIONE

Fra due o più numeri naturali diversi da 0:

il **massimo comune divisore (MCD)** è il più grande fra i loro divisori comuni.

il **minimo comune multiplo (mcm)** è il più piccolo fra i loro multipli comuni diversi da 0.

ESEMPIO

Divisori di 12: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

divisori comuni

Divisori di 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

MCD(12; 18) = 6.

Multipli di 12: 12, 24, 36, 48, 60, 72, ...

multipli comuni

Multipli di 18: 18, 36, 54, 72, 90, ...

mcm(12; 18) = 36.

Per la ricerca del massimo comune divisore e del minimo comune multiplo è utile la scomposizione in fattori primi.

REGOLA

Se scomponiamo in fattori primi due o più numeri naturali:

il **MCD** è il prodotto dei *fattori comuni*, presi una sola volta, con l'*esponente minore*.

il **mcm** è il prodotto di tutti i *fattori comuni e non comuni*, presi una sola volta, con l'*esponente maggiore*.

ESEMPIO

Per calcolare MCD e mcm di 120 e 140, scomponiamo i numeri in fattori primi. Mettiamo poi i fattori in colonna.

120	2	140	2	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	
60	2	70	2	$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$	
30	2	35	5	$MCD = 2^2 \cdot 5$	fattori comuni con l'esponente minore
15	3	7	7	$mcm = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	fattori comuni e non comuni con l'esponente maggiore
5	5	1			
1					

Il MCD è 20, il mcm è 840.

Se due numeri non hanno fattori in comune diversi da 1, diciamo che sono **primi tra loro**. Il loro MCD è 1 e il loro mcm è il prodotto dei due numeri.

- ▶ 10 e 21 sono primi tra loro.

Algoritmo di Euclide

Con un **algoritmo** descriviamo l'insieme delle istruzioni da eseguire per passare dai dati di un problema ai risultati.

Euclide, negli *Elementi*, descrive un algoritmo per il calcolo del MCD fra due numeri mediante sottrazioni successive.

Il metodo si basa sul seguente teorema.

TEOREMA

Divisibilità della differenza

Se due numeri naturali a e b , con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c , allora anche $a - b$ è divisibile per c .

130 e 40 sono divisibili per 5.
↓
130 - 40 = 90 è divisibile per 5.

ESEMPIO

DIMOSTRAZIONE

Se a è divisibile per c , allora $a : c = q_1 \rightarrow a = q_1 \cdot c$.

Se b è divisibile per c , allora $b : c = q_2 \rightarrow b = q_2 \cdot c$.

Consideriamo la differenza:

$$a - b = q_1 \cdot c - q_2 \cdot c \rightarrow a - b = (q_1 - q_2) \cdot c \rightarrow a - b \text{ è divisibile per } c.$$

raccogliamo c

Dati a e b , con $a > b$, per il teorema precedente, quando a e b hanno un divisore comune, anche $a - b$ ha lo stesso divisore, quindi, in particolare, possiamo scrivere:

$$MCD(a; b) = MCD(a - b; b), \quad \text{con } a > b.$$

1 NUMERI NATURALI

Nell'algoritmo utilizziamo anche il fatto che il MCD fra un numero e se stesso è ancora il numero stesso:

$$\text{MCD}(a; a) = a.$$

Esaminiamo ora l'algoritmo.

ALGORITMO

MCD con sottrazioni successive

Consideriamo a e b , con $a > b$;

calcoliamo $a - b$;

se $a - b = b$, allora $a - b$ è il $\text{MCD}(a; b)$ e ci fermiamo;

altrimenti sostituiamo il maggiore fra i numeri $a - b$ e b al posto di a e il minore al posto di b , e ripetiamo il procedimento precedente, calcolando la differenza.

ESEMPIO

Calcoliamo $\text{MCD}(58; 18)$.

$$58 - 18 = 40; \quad \text{— } 40 \text{ è maggiore di } 18, \text{ quindi sostituiamo } 40 \text{ a } 58$$

$$40 - 18 = 22; \quad \text{— } 22 \text{ è maggiore di } 18, \text{ quindi sostituiamo } 22 \text{ a } 40$$

$$22 - 18 = 4; \quad \text{— } 4 \text{ è minore di } 18, \text{ quindi sostituiamo } 4 \text{ a } 18 \text{ e } 18 \text{ a } 22$$

$$18 - 4 = 14; \quad 14 - 4 = 10; \quad 10 - 4 = 6; \quad 6 - 4 = 2; \quad 4 - 2 = 2.$$

sono uguali: ci fermiamo

2 è il MCD.

Ecco come abbiamo applicato le proprietà precedenti:

$$\text{MCD}(58; 18) = \text{MCD}(40; 18) = \text{MCD}(22; 18) = \text{MCD}(18; 4) = \text{MCD}(14; 4) =$$

$$58 - 18$$

$$40 - 18$$

$$22 - 18$$

$$18 - 4$$

$$\text{MCD}(10; 4) = \text{MCD}(6; 4) = \text{MCD}(4; 2) = \text{MCD}(2; 2) = 2$$

$$14 - 4$$

$$10 - 4$$

$$6 - 4$$

$$4 - 2$$

Otteniamo il $\text{MCD} = 2$ quando i due numeri sono uguali.

Nell'esempio precedente, da 58 abbiamo tolto 18 per 3 volte fino a giungere a 4:

$$[(58 - 18) - 18] - 18 = 4.$$

3 sottrazioni

Queste 3 sottrazioni ripetute equivalgono a dividere 58 per 18, ottenendo 4 come resto. Quindi, utilizzando il teorema della divisibilità della differenza, ma evitando sottrazioni ripetute, diciamo che se 58 e 18 sono divisibili per uno stesso numero, anche 4, resto di $58 : 18$, è divisibile per lo stesso numero.

L'esempio giustifica il seguente teorema.

TEOREMA

Divisibilità del resto

Se due numeri naturali a e b , con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c , allora anche r , resto della divisione $a : b$, è divisibile per c .

130 e 40 sono divisibili per 5.

$$130 : 40 = 3 \text{ con resto } 10$$

↓
10 è divisibile per 5

ESEMPIO

$$[(58 - 18) - 18] - 18 = 4$$

$$58 : 18 = 3 \text{ resto } 4$$

Nell'algoritmo di Euclide, per diminuire il numero di operazioni da eseguire, possiamo allora procedere mediante **divisioni successive**, invece che sottrazioni, e utilizzare i resti ottenuti.

Calcoliamo $\text{MCD}(58; 18)$ con divisioni ripetute.

$$58 : 18 = 3 \quad \text{con resto } 4 \quad \rightarrow \quad \text{MCD}(58; 18) = \text{MCD}(18; 4);$$

$$18 : 4 = 4 \quad \text{con resto } 2 \quad \rightarrow \quad \text{MCD}(18; 4) = \text{MCD}(4; 2);$$

$$4 : 2 = 2 \quad \text{con resto } 0 \quad \rightarrow \quad \text{MCD}(4; 2) = 2.$$

Abbiamo ottenuto di nuovo $\text{MCD}(58; 18) = 2$.

Nell'esempio ci siamo fermati quando abbiamo ottenuto resto 0, perché in questo caso il secondo numero è divisore del primo e quindi è anche il MCD. In generale:

$$\text{MCD}(a; b) = b, \text{ se } r = 0.$$

Una proprietà fra mcm e MCD di due numeri

Il minimo comune multiplo e il massimo comune divisore di due numeri sono legati anche dalla seguente proprietà:

$$\text{mcm}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\text{MCD}(a; b)}.$$

- Consideriamo $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Il MCD, scomposto in fattori, è $3 \cdot 7$, e il mcm è $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Esprimiamo il prodotto dei due numeri, lasciandoli scomposti in fattori:

$$84 \cdot 105 = (2^2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7).$$

Vediamo che $3 \cdot 7$, cioè il MCD, è ripetuto due volte, mentre nel mcm dobbiamo considerarlo una volta sola. Quindi:

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \frac{(2^2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7)}{3 \cdot 7} \quad \rightarrow \quad \text{mcm}(84; 105) = \frac{84 \cdot 105}{\text{MCD}(84; 105)}.$$

La proprietà permette di calcolare il mcm se si è calcolato il MCD, per esempio con l'algoritmo di Euclide.

- Con l'algoritmo di Euclide abbiamo calcolato che $\text{MCD}(58; 18) = 2$, quindi:

$$\text{mcm}(58; 18) = \frac{58 \cdot 18}{2} = 522.$$

ESERCIZI PER COMINCIARE

1  **ANIMAZIONE** Calcola mcm e MCD di 96, 72, 180.

2  **ANIMAZIONE** Utilizzando l'algoritmo di Euclide, calcola il MCD fra 330 e 90.

3 Calcola il mcm dei due numeri dell'esercizio precedente.

[990]

Utilizza il mcm o il MCD per risolvere i seguenti problemi.

4 Andrea, Bruno e Carlo percorrono un circuito in bicicletta. Andrea fa un giro in 8 minuti, Bruno in 6 e Carlo in 4. In un punto del circuito si trovano insieme. Dopo quanto tempo si ritrovano insieme nello stesso punto? [24 minuti]

5 Un apicoltore ha prodotto 360 vasetti di miele millefiori, 320 di acacia, 200 di castagno. Vuole ottenere il maggior numero di confezioni uguali, ciascuna contenente lo stesso numero di vasetti di ognuno dei tre tipi. Quante sono le confezioni? Quanti vasetti di ogni tipo contengono? [40; 9, 8, 5]

5. SISTEMI DI NUMERAZIONE

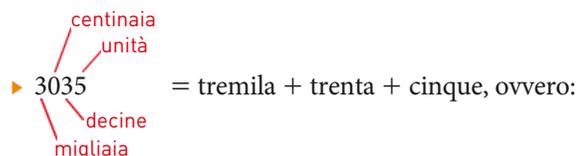
➔ Esercizi a pagina 33

In base dieci

Di solito scriviamo i numeri naturali utilizzando dieci cifre:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

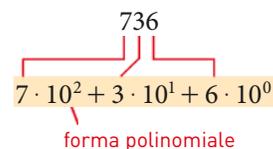
Il sistema che usiamo è **posizionale**, perché una cifra ha significato diverso a seconda della posizione che occupa.



$$3035 = 3 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1 = 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

La scrittura 3035 è dunque un modo sintetico per esprimere la somma dei prodotti dei numeri rappresentati dalle cifre per le potenze di dieci a cui corrispondono, ossia la scrittura in **forma polinomiale** del numero.

Dieci è la **base** del sistema, che viene detto *sistema di numerazione in base dieci*.



In altre basi

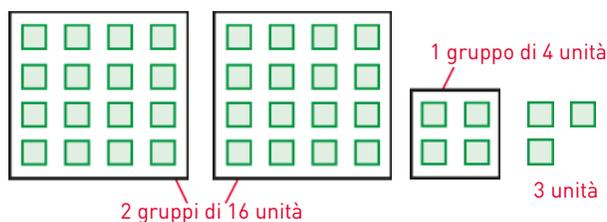
Possiamo scrivere un numero naturale utilizzando anche come base un qualsiasi numero diverso da dieci. Cosa cambia rispetto alla base dieci?

Se, per esempio, scriviamo un numero in base 4, abbiamo a disposizione solo le cifre 0, 1, 2, 3, che sono collegate alle potenze $4^0, 4^1, 4^2, 4^3, 4^4, 4^5, \dots$

Per distinguere la nuova scrittura da quella in base dieci, la mettiamo fra parentesi e indichiamo, come pedice, la base.

▶ Scriviamo il numero degli oggetti della figura con:

$(213)_4$ — si legge: «due uno tre in base quattro»



Le cifre sono collegate a potenze di 4:

2 gruppi da 16 unità, 1 gruppo da 4 unità, 3 unità.
 4^2 4^1 4^0

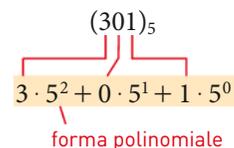
Per passare allora da una base diversa alla base dieci usiamo la forma polinomiale.

▶ $(213)_4 = 2 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 2 \cdot 16 + 4 + 3 = 39$

$(213)_4$ e 39 sono due modi diversi di scrivere lo stesso numero.

In una qualsiasi base n , la scrittura 10, che leggiamo «uno zero», indica la base stessa; 100, cioè «uno zero zero», indica un gruppo da n^2 unità e così via.

▶ $(10)_7 = 1 \cdot 7 + 0 = 7$; $(100)_7 = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 0 = 49$.



Se la base è maggiore di dieci, oltre alle solite cifre, usiamo le lettere dell'alfabeto:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, ...

10 11 12 13

► $(15B)_{16} = 1 \cdot 16^2 + 5 \cdot 16 + 11 = 256 + 80 + 11 = 347$

Da base dieci a base diversa

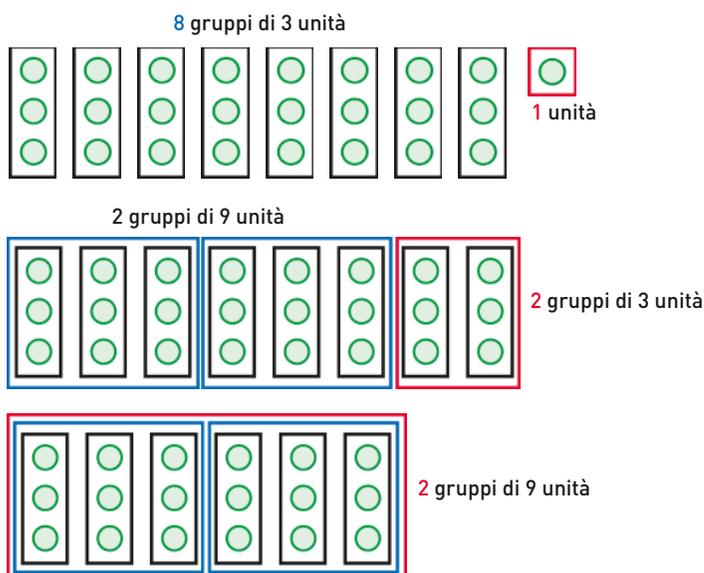
Per passare dalla base dieci a un'altra base usiamo il metodo delle divisioni ripetute.

► Come si scrive 25 in base 3?

$25 : 3 = 8$ con resto 1

$8 : 3 = 2$ con resto 2

$2 : 3 = 0$ con resto 2



I resti, letti dal basso verso l'alto, sono le cifre del numero in base 3:

$25 = (221)_3$.

ESERCIZI PER COMINCIARE

Scrivi i numeri la cui forma polinomiale è la seguente.

1 $9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10; \quad 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^0$.

2 $8 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 9; \quad 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10$.

3 **ANIMAZIONE** Scrivi:

a. $(10210)_3$ in base dieci;

b. 3615 in base 4.

Scrivi in base dieci i seguenti numeri.

4 $(11000)_2; \quad (200)_3; \quad (211)_4$.

5 $(312)_5; \quad (10A)_{12}; \quad (1002)_5$.

Scrivi i seguenti numeri espressi in base dieci nella base indicata a fianco.

6 143 in base 2; 218 in base 5.

$[(10001111)_2; (1333)_5]$

7 3612 in base 3; 1322 in base 4.

$[(11221210)_3; (110222)_4]$

8 **VIDEO** **Sistemi di numerazione** Scrivi il numero 179 in base 5 e in base 2. Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.

9 Quali numeri naturali rappresentano i numeri $(102)_3, (102)_4, (102)_5$?

Come si scrive invece in base 5 il numero naturale 102?

1. ORDINAMENTO E OPERAZIONI

NUMERI NATURALI, RAPPRESENTAZIONE, ORDINAMENTO ➔ Teoria a pagina 2

1 **VERO O FALSO?** In una biblioteca è sempre espresso da un numero naturale:

- | | | | |
|--|---|---|---|
| a. il numero dei libri presenti. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F | d. il numero di tessera di un utente. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| b. il numero delle pagine di un libro. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F | e. il rapporto tra il numero dei libri gialli e quello dei libri di storia. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| c. il prezzo di copertina di un libro. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F | | |

2 **YOU & MATHS** **Numbers in words** Write the following numbers in words if they are in digits, and write them in digits if they are given in words.

- | | |
|------------------------------------|------------|
| a. Four hundred and two. | d. 2005. |
| b. One thousand two hundred three. | e. 43 010. |
| c. Fifteen hundred twenty four. | f. 10 002. |

3 Traduci in simboli le seguenti frasi.

- | | | |
|-----------------------|----------------------------|----------------------------------|
| a. 8 è maggiore di 1. | c. 7 è diverso da 6. | e. x è minore o uguale a 6. |
| b. 10 è minore di 12. | d. 5 è compreso tra 2 e 9. | f. a è maggiore o uguale a 15. |

Scrivi i numeri naturali n che verificano le seguenti condizioni.

- | | |
|--|------------------------------|
| 4 Sono minori di 7. | 7 $93 < n \leq 100$. |
| 5 Sono minori o uguali a 6. | 8 $22 \leq n < 27$. |
| 6 Sono maggiori di 2 e minori o uguali a 5. | 9 $0 < n < 2$. |

COMPLETA inserendo i simboli $<$, $>$ ($n \in \mathbb{N}$).

10 13 18 ; 0 5 ; 101 110 ; 99 0 .

11 n $n + 1$; $n + 3$ $n + 5$; n $7 + n$; $8 + n$ n .

12 **COMPLETA** inserendo il numero corretto.

Il precedente di 1000 è .

Il successivo di 77 è .

Il successivo di è 1010.

Il precedente di è 1.

13 Se n è un numero naturale, scrivi:

- | |
|--|
| a. il precedente di $n + 2$; |
| b. il successivo di $n + 3$; |
| c. il precedente di $n + 1$; |
| d. il successivo di $n - 4$; |
| e. il successivo del successivo di $n + 1$. |

Scrivi in ordine crescente e decrescente i seguenti numeri.

14 22; 202; 2; 20; 1002; 102.

15 1001; 1010; 1101; 1110; 1011; 1121.

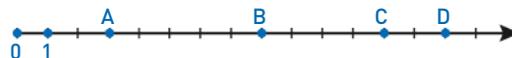
IN FORMA GRAFICA

Rappresenta sulla semiretta orientata i seguenti numeri, scegliendo un'opportuna unità di misura.

16 1; 5; 12; 16; 7; 8.

17 0; 1000; 2500; 3000; 500; 250.

18 Per ogni punto indicato scrivi il numero corrispondente.



OPERAZIONI E OPERANDI ➔ Teoria a pagina 2

19 Scrivi il nome degli operandi e del risultato di ciascuna operazione.

a. $7 + 6 = 13$

d. $10 : 5 = 2$

b. $7 - 6 = 1$

e. $2^4 = 16$

c. $10 \cdot 5 = 50$

20 **COMPLETA** inserendo il segno di operazione.

a. $10 \square 2 = 12$

c. $10 \square 2 = 8$

b. $10 \square 2 = 20$

d. $10 \square 2 = 5$

In ciascuno dei seguenti casi, in base alle informazioni fornite, imposta e risolvi l'operazione corrispondente.

21 Sottrazione con minuendo 89 e sottraendo 63; sottrazione con minuendo 18 e differenza 11; sottrazione con differenza 48 e sottraendo 29.

22 Divisione con dividendo 104 e quoziente 13; divisione con divisore 3 e quoziente 17; divisione con dividendo 105 e divisore 7.

23 Potenza con base 6 ed esponente 2; potenza con base 0 ed esponente 11; potenza con esponente 0 e base 13.

24 **VERO O FALSO?**

a. Elevare alla terza potenza un numero equivale a moltiplicare quel numero per 3. V F

b. Elevando a 0 un qualsiasi numero naturale, si ottiene 1. V F

c. $(3 - 3)^0 = 1$ V F

d. $0^3 = 0$ V F

e. $4^2 = 2^4$ V F

f. $n^2 = 2^n$, con $n \in \mathbb{N}$. V F

Calcola le seguenti potenze.

25 2^7 ; 2^5 ; 3^4 ; 5^2 ; 5^3 ; 6^2 ; 2^6 .

26 12^2 ; 4^3 ; 7^0 ; 13^2 ; 1^5 ; 2^{10} ; 10^2 .

27 Indica quali, tra i seguenti numeri, sono potenze di 5.

1; 5; 10; 15; 25; 55; 125; 225; 500; 625.

28 Tra i seguenti numeri, indica quali sono potenze di 2 e quali sono potenze di 4.

1; 2; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 64; 128; 400.
Che cosa noti?

29 **VERO O FALSO?** Sia b un numero naturale.

a. $0^0 = 1$ V F

b. $1^b = 1$ V F

c. $b^0 = 1$ se $b \neq 0$ V F

d. $1^0 = 1^b$ V F

e. $b^1 = b$ V F

f. $b^2 \geq b$ V F

COMPLETA le seguenti espressioni.

30 $6 + \square = 10$; $9 + \square = 21$;
 $8 - \square = 5$; $10 - \square = 0$.

31 $\square \cdot 15 = 15$; $10 \cdot \square = 60$;
 $\square \cdot 5 = 0$; $\square \cdot 0 = 0$.

32 $\square : 5 = 0$; $(\square + 7) : 5 = 2$;
 $(\square - 8) : 2 = 1$; $\square : 12 = 3 \cdot 4$.

33 $(\square - 1)^2 = 49$; $(\square : 7)^5 = 4 \cdot 8$;
 $12 \square = 1$; $2 \square = 8$; $\square^2 = 36$.

34 $(\square : 3)^7 = 0$; $(\square - 12)^3 = 0$;
 $(42 : 6) \square = 1$; $(3 + \square)^3 = 125$.

1 NUMERI NATURALI

35 **INVALSI 2006** Sono dati due numeri di due cifre $a2$ e $4b$ in cui a rappresenta la cifra delle decine del primo numero e b la cifra delle unità del secondo. Sapendo che $23 + 4b = a2$, quanto vale la somma di a e b ?

- A** 15 **B** 16 **C** 17 **D** 18

36 **COMPLETA** i quadrati magici in modo che la somma dei numeri in ogni riga, colonna e diagonale sia costante. Inserisci i numeri da 1 a 9 per il quadrato 3×3 e da 1 a 16 per quello 4×4 .

6		8
	5	
		4

	3		13
	6	7	
4	15	14	1

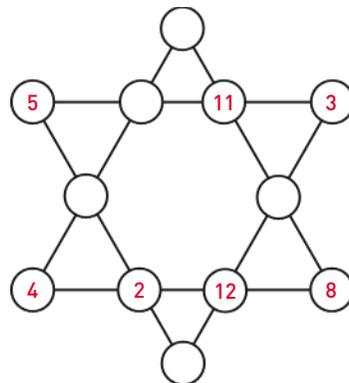
37 La somma tra un numero e il suo successivo è 45. Trova i due numeri.

38 Scrivi tutte le coppie di numeri naturali la cui somma è 6.

39 Scrivi tutte le coppie di numeri naturali il cui prodotto è 44.

40 La somma tra due numeri pari consecutivi è 54. Trova i due numeri.

41 **COMPLETA** la stella magica in modo che nei cerchi compaiano i numeri da 1 a 12, ciascuno una sola volta, e che la somma dei numeri in quattro cerchi allineati in tutti i casi sia 26.



42 **CHI HA RAGIONE?** Marco: «Le coppie di numeri naturali la cui differenza è 2 sono molte: per scriverle tutte mi servirà una pagina di quaderno!». Sara: «Non credo ti basteranno tutti i quaderni del mondo...». Tu che cosa ne dici?

ESPRESSIONI ➔ Teoria a pagina 3

43 **YOU & MATHS** Working backwards

- Write at least 3 expressions that, calculated, give 16.
- Now write 3 more expressions that give 16, making sure to use the structure $a \cdot (b \pm c) = 16$.

44 **TEST** Solo in una delle seguenti coppie di espressioni la differente posizione delle parentesi *non* influisce sul risultato. In quale?

- A** $5 \cdot (3 + 12 : 16)$; $5 \cdot 3 + 12 : 6$. **C** $14 : 2 + 3 \cdot 5 - 4$; $14 : 2 + (3 \cdot 5 - 4)$.
- B** $80 : 10 - 2^3$; $80 : (10 - 2^3)$. **D** $(2^5 + 4) : 4 - 2$; $2^5 + 4 : (4 - 2)$.

Semplifica le seguenti espressioni, osservando come i risultati cambiano in base alla posizione delle parentesi.

45 $22 + 48 - 6 \cdot 8 : 2$; $22 + (48 - 6) \cdot 8 : 2$; $22 + (48 - 6 \cdot 8) : 2$. [46; 190; 22]

46 $2 \cdot 3^2 + 15 - 4 \cdot 3$; $2 \cdot (3^2 + 15) - 4 \cdot 3$; $(2 \cdot 3)^2 + 15 - 4 \cdot 3$. [21; 36; 39]

47 $72 : 2 \cdot 3^2 + 1$; $72 : (2 \cdot 3)^2 + 1$; $72 : 2 \cdot 3^{(2+1)}$. [325; 3; 972]

48 $168 : 2^3 + 6 : 3 - 2$; $168 : (2^3 + 6) : 3 - 2$; $(168 : 2^3 + 6) : (3 - 2)$. [21; 2; 27]

Semplifichiamo l'espressione $\{(15 + 16) : 3\} \cdot (15 - 13) + 2^4 : 5 + 8^0$.

$\{(15 + 6) : 3\} \cdot (15 - 13) + 2^4 : 5 + 8^0 =$) eseguiamo le operazioni nelle parentesi tonde e le potenze

$\{21 : 3\} \cdot 2 + 16 : 5 + 1 =$) svolgiamo l'operazione nelle parentesi quadre

$7 \cdot 2 + 16 : 5 + 1 =$) nelle graffe calcoliamo prima il prodotto, poi la somma

$30 : 5 + 1 =$) eseguiamo la divisione e poi l'addizione

7

 **CHECKER** Semplifica le seguenti espressioni.

49 $[13 - (7 + 2)] : 2 + [10 - 3 \cdot (2 + 1) + 5]$ [8]

50 $\{(5 + 11) : [17 - (3 + 8 + 4) + 2] + 1\} \cdot 3$ [15]

51 $3 + (7 - 5) \cdot 4 - 2[(15 - 5) : 2 - 1] : (13 - 2 \cdot 5 + 1)$ [9]

52 $[(10 - 2) : 4 + 7 \cdot 2 - (2 + 8 - 3)] : (4 + 5) + (14 - 8) : 2$ [4]

53 $[12 + (13 - 4) : 3] : [25 - 2 \cdot (15 - 4)] - (7 \cdot 2 - 10)$ [1]

54 $[(10 - 7 + 4) : 7] \cdot (5 \cdot 6) - (8 - 5) \cdot (4 + 10 - 6)$ [6]

55 $[(29 + 5) : 2 + 3] : 2 - [(45 - 12) : 11 + 7]$ [0]

56 $1 + 5 \cdot [(17 - 2) : 3] - 15 \cdot (95 : 5 - 4 - 2 \cdot 7)$ [11]

57 $27 - \{(8 \cdot 3 - 4) : 5 + [19 - 6 + 3 - 4 \cdot (7 - 5)] \cdot 2 + 7\}$ [0]

58 $\{[3 + (8 - 2 + 7 - 1) : (28 : 7)] \cdot [(10 - 2 + 7) : (27 : 9) - 3 + 1]\} : 6$ [3]

59 $(2^0 + 1^0 \cdot 4) \cdot 2 + [2^3 + 21 : 3 - 4 \cdot 3 + (2 \cdot 5 - 7)]$ [16]

60  **ESEMPIO DIGITALE** $[(5 - 2) : 3 + 2] \cdot [4 - (3^2 - 9)] + [36 : (1 + 11) - 1]$

61 $24 : \{[3 \cdot (3 + 2) - 14] \cdot [16 : 2 + 3 - 2 \cdot 5] + 2\}$ [8]

62 $(5 \cdot 4 : 10) - \{13 - 2 \cdot [(22 : 2 - 8) + (5 + 80 : 4) - 23]\} : (4 \cdot 3 - 63 : 7)$ [1]

63 $\{[(22 - 3 \cdot 7) + 5 \cdot 7] : 18\} \cdot \{[(5 + 14 : 2) - 8] \cdot 5 - 7 + (42 : 3 - 11)\}$ [32]

64 $(2 \cdot 4 + 2 - 21 : 7) \cdot 5 + [7 \cdot (1 + 3) : 2 + 4 \cdot 2 + 8] : [36 : (15 - 3) \cdot 2]$ [40]

65 $[(5 \cdot 6 : 2 + 18 : 3) : (20 : 4 - 14 : 7)] \cdot \{2 \cdot 10 : 5 + [7 - (8 - 3)]\}$ [42]

66 $(160 - 10) \cdot (5 - 3) : [(15 + 6) : (14 : 2)] : \{[12 - 2 - (6 + 3)] \cdot [39 : 3 - (15 - 4)]\}$ [50]

67 $12 : 3 + 7 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2^3$ [30]

68 $3^2 + 125 : 5 - 18 : 6 + 4^2 : 2 - 1$ [38]

69 $7^2 + 10^2 : 2^2 - 7 \cdot 5 \cdot 2 - 3 : 1 + 5^2$ [26]

70 $127 : 127 + 39 : 13 + 128 : 2^4 - 3 \cdot 2^2$ [0]

71 $(2^3 \cdot 3^1 - 2) : 2 + (7^2 + 5^1) : (3^2 - 3) - [6^2 + 5 - (6^2 + 2)]$ [17]

1 NUMERI NATURALI

- 72** $\{2^3 \cdot (2^4 - 2^2) : 3 \cdot (5 - 3) - 7 - [(2 \cdot 3) \cdot (2^2 + 2) + 2]\} \cdot 2^2$ [76]
- 73** $[6^2 + 34 - (10 - 4) \cdot 5] : [7 + 5 \cdot 3^2 - 6 \cdot (8 - 2 \cdot 3)]$ [1]
- 74** $(3 \cdot 5 - 3^2) : 3 + 4^2 \cdot 5 - (81 : 27 + 2^2) \cdot (6^2 - 5^2)$ [5]
- 75** $7^2 - 2^3 \cdot \{2^2 + 5 - 2^2 \cdot [3^2 - 2^3 \cdot (5^2 - 3 \cdot 2^3)]\}$ [9]
- 76** $(8 + 10^2 : 5 : 2 - 10^2 : 25 \cdot 2) : 2 + 4^2 - 20 : 4 \cdot 3$ [6]
- 77** $\{(21 : 3)^2 - 5 \cdot 2^3\} : 3 + 2 \cdot 13 - 1\} : 2^2$ [7]
- 78** $1 + [3^2 - 7 \cdot (2^2 - 3)] : (5 \cdot 3 + 2^4 - 5^2 - 4) + (13 \cdot 3 + 1) : 8$ [7]
- 79** $[12 \cdot 3 - 2 - (7 - 5)] : (5^0 + 3) \cdot (3^2 - 7) - (2^2 + 11 \cdot 3 - 5^2)$ [4]
- 80** $\{[12 \cdot (3 - 1) + (2^3 \cdot 3^1 - 10) : 7] : (11^0 + 2 \cdot 6)\} - [3 - (3 \cdot 2^1 - 2^0 \cdot 3)]$ [2]
- 81**  **ESEMPIO DIGITALE** $3 + 12 \cdot (4^2 - 3^2) + 2^4 \cdot (2^3 - 8)^3 - 2^2 \cdot [(5^2 - 8 \cdot 3)^2 + 3^2 \cdot 2]$
- 82** $28 + 100 : \{[3 \cdot 2 + 64 : (64 : 8 : 2)^2] : 5 + (3^4 : 27) \cdot 2^4\}$ [30]
- 83** $[2^3 \cdot 3^2 - (5^2 + 7 \cdot 5) : 2] : 3 - [(9 \cdot 3 - 2^4 : 2) \cdot 2 - 30]$ [6]
- 84** $\{[(7^2 - 3^2) : 10 - 2] \cdot 8 + 3^3 \cdot 2^2 : 6\} : (4^2 + 1)$ [2]
- 85** $\{[(42 : 3 : 2 + 35 : 5 \cdot 2) : 3 + 25 \cdot 3 : 5 - 8] : 2\}^2 - 19 \cdot 2$ [11]
- 86** $\{[(5^0 + 3 \cdot 2^3) : 5]^2 + 6^2 : 4 : 3 - 12^2 : 9\} : 6 \cdot 2 \cdot 7^0 - 1$ [3]
- 87** $15 \cdot \{[7 \cdot 8 - (12 : 3)^2 - 2^4 \cdot 3^2 + 2^3 \cdot 3^4]^0\}^5 : 5 \cdot 4 + 2 \cdot 3^2\} : 6$ [5]
- 88** $\{[4^3 - (2 \cdot 5^2) - 8]^2 + (18 : 6 \cdot 4)^2\} : (3^0 + 3 \cdot 5 + 80 : 8 \cdot 2)$ [5]
- 89** $\{[3^2 + (2^2 - 1)^3 - (17 - 2) : 3] \cdot 2\} : 6^0 + (24 \cdot 2 - 6^2)^2 : 3^2 - 4^3 - 2^2 \cdot 3$ [2]
- 90** $[12 + (3^2 - 1)^2] : \{[29 - (5^3 - 10^2) + (6 + 2 \cdot 5)^2] : (2^2 \cdot 5) - 11\}^2 - (2 \cdot 3^2 + 1)$ [0]

Dalle parole ai simboli

- 91**  **INVALSI 2011** Qual è l'espressione numerica che corrisponde alla frase: «Al 3 aggiungi il prodotto di 5 e 9, poi dividi per 6 e quindi sottrai 2»?
- A** $[3 + (4 + 9)] : (6 + 2)$ **C** $3 \cdot (5 + 9) : 6 - 2$
- B** $3 + 5 \cdot 9 : 6 - 2$ **D** $(3 + 5 \cdot 9) : 6 - 2$

Traduciamo la seguente frase in espressione e calcoliamone il valore:

«Dividi per 6 la differenza tra 28 e il quadrato di 2».

«Dividi per 6 la differenza... → (... - ...) : 6

...tra 28... → (28 - ...) : 6

...e il quadrato di 2» → (28 - 2²) : 6

Semplifichiamo l'espressione ottenuta: $(28 - 2^2) : 6 = (28 - 4) : 6 = 24 : 6 = 4$.

Traduci le seguenti frasi in espressioni e calcolane il valore.

- 92** Sottrai a 15 il rapporto tra 20 e 4. [10]
- 93** Somma a 2 il prodotto tra 8 e 4. [34]
- 94** Somma il rapporto tra 16 e 2 con il prodotto tra 5 e 4. [28]
- 95** Moltiplica per 5 la differenza tra 8 e 6. Somma al risultato il prodotto tra 2 e 4. [18]
- 96** Moltiplica per 2 il prodotto tra la differenza tra 5 e 4 e il doppio di 6. Dividi il risultato per 8. [3]
- 97** Somma 5 alla metà del rapporto tra 44 e il doppio di 11. [6]
- 98** Aggiungi il quadrato di 2 alla somma del cubo di 3 con 5. Dividi poi il risultato per il quadrato di 6. [1]
- 99** Dividi il cubo della differenza tra 15 e 11 per il quadrato della somma tra il quadrato e il doppio di 2. [1]
- 100** Somma 2 al doppio prodotto tra la somma tra 5 e 4 e la differenza tra 8 e 5. Dividi il risultato per il prodotto tra 4 e 7 ed eleva l'espressione ottenuta alla quinta potenza. [32]
- 101** Somma 5 alla differenza tra 15 e 10. Eleva il risultato alla quarta potenza e poi dividilo per il quadrato del doppio di 10. [25]

Dai simboli alle parole

Traduciamo in parole l'espressione: $1 + 8 : (14 - 4 \cdot 3)^3$.

ESEMPIO

- $1 + \dots$ → «Somma a 1...»
- $1 + 8 : (\dots - \dots)^3$ → ...il rapporto tra 8 e il cubo della differenza...
- $1 + 8 : (14 - \dots)^3$ → ...tra 14...
- $1 + 8 : (14 - 4 \cdot 3)^3$ → ...e il prodotto tra 4 e 3»

Traduci in parole le seguenti espressioni.

- 102** $2 + 3 \cdot 5$
- 103** $16 - 15 : 3$
- 104** $25 : 5 + 2^2 \cdot 5$
- 105** $(15 : 5 + 3^2) : 6$
- 106** $(15 - 2^3) \cdot 2 + 2$
- 107** $11 - (3 + 2 \cdot 5 + 2) : 5$
- 108** $20 - [23 - 2 \cdot 3^2]$
- 109** $[5 + (2 \cdot 3)^2 : 12]^2$
- 110** $(8^2 \cdot 2^3)^2 - (2^8 \cdot 3^2)^2$

Diagrammi ad albero

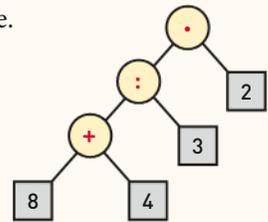
Scriviamo l'espressione relativa al diagramma ad albero e calcoliamone il valore.

Il diagramma si legge dal basso verso l'alto: va eseguita prima l'addizione fra 8 e 4; la somma va divisa per 3 e il risultato va moltiplicato per 2.

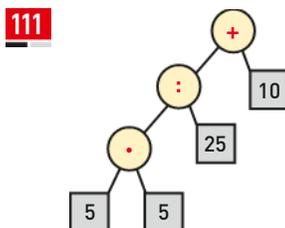
Traducendo in espressione, otteniamo:

$$[(8 + 4) : 3] \cdot 2.$$

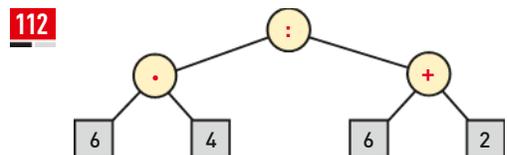
$$\text{Semplifichiamo l'espressione: } [(8 + 4) : 3] \cdot 2 = (12 : 3) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8.$$



Scrivi e semplifica le espressioni relative ai seguenti diagrammi ad albero.



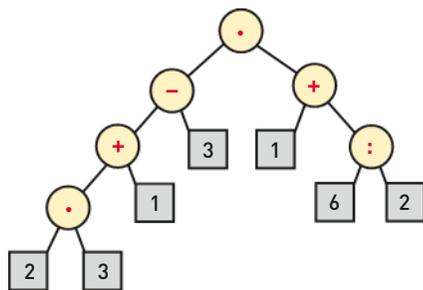
[11]



[3]

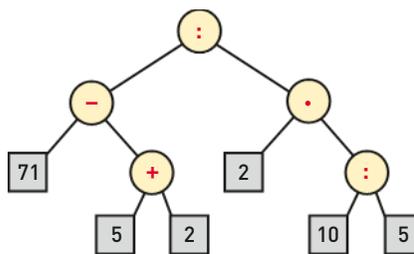
1 NUMERI NATURALI

113



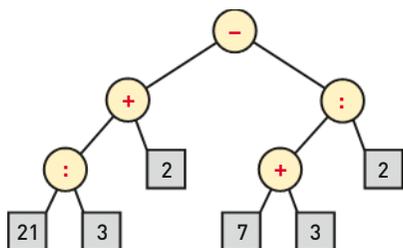
[16]

115



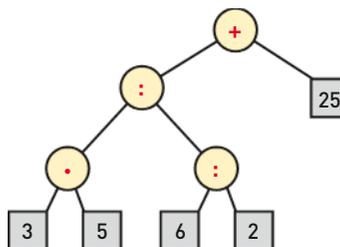
[16]

114



[4]

116



[30]

IN FORMA GRAFICA Traduci in un diagramma ad albero le seguenti espressioni e semplificalle.

117 $(18 - 6) : 4$

120 $[(7 \cdot 6 - 2) \cdot 3 + 7] \cdot 2$

118 $[26 : (2 \cdot 4 + 5)]$

121 $(5 - 1) \cdot 2 - (16 + 4) : (9 \cdot 2 + 2)$

119 $7 \cdot (6 - 2 \cdot 3) + 7 \cdot 2$

122 $[24 : 6 + (5 + 3) : 4] - 1$

Problemi **INTORNO A NOI**

ESEMPIO

Scriviamo l'espressione che permette di risolvere il problema: «Sandro ha 2 banconote da € 5 e 4 monete da € 2. Si ferma a pranzare e compra 2 tranci di pizza da € 2 ciascuno e una bottiglietta d'acqua da € 1. Nel pagare si accorge di avere in tasca anche altre tre monete da € 1. Quanto denaro resta a Sandro?».

$$2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot 1$$

2 banconote da € 5
4 monete da € 2
spende 2 tranci da € 2
trova 1 bottiglietta da € 1
3 monete da € 1

Semplifichiamo l'espressione: $2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot 1 = 10 + 8 - 4 - 1 + 3 = 16$.
A Sandro restano 16 euro.

Risolvi i seguenti problemi scrivendo un'espressione e semplificandola.

123 Una pasticceria vende dei deliziosi amaretti ripieni in confezioni da tre. Quanti amaretti ha venduto in una giornata, considerando i dati in figura? [51]

inizio giornata:
243 amaretti



fine giornata:
64 confezioni

124 Ogni settimana Cristina fa 12 viaggi in autobus su un percorso urbano e 4 su uno extraurbano. Se il biglietto urbano costa € 1 e quello extraurbano € 2, quanto spende in un mese? (Considera il mese composto da 4 settimane.) [€ 80]

125 **Luca si organizza...** Luca è in vacanza. Sa che tra un'ora deve uscire con gli amici, quindi pensa: «Ho un sacco di tempo! Posso giocare ai videogiochi per 40 minuti, suonare il basso per un po', consultare un social network per 5 minuti. Poi farò la doccia in 3 minuti e uscirò». Quanto tempo ha Luca per suonare?

126 Giorgio parte per un'escursione, con la sua borraccia da un litro, assieme all'amico Marco. In base alle seguenti informazioni, quanta acqua rimane nella borraccia di Giorgio? [40 cL]



Lettere e numeri

ESEMPIO

Calcoliamo il valore dell'espressione letterale $(4a - a^2)^{b-1} \cdot (2b - 3a)$ quando $a = 3$ e $b = 5$.

$$(4a - a^2)^{b-1} \cdot (2b - 3a) \rightarrow (4 \cdot 3 - 3^2)^{5-1} \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 3) = (12 - 9)^4 \cdot (10 - 9) = 3^4 \cdot 1 = 81$$

sostituiamo
3 ad a e 5 a b
semplifichiamo
l'espressione

Per ciascuna delle seguenti espressioni calcola il valore che si ottiene sostituendo alle lettere i numeri indicati.

127 $3ab - 2a^2 : (b + 1)$; $a = 2$, $b = 3$. [16]

128 $(3a)^b + a : (3 + b)$; $a = 12$, $b = 0$. [5]

129 $a \cdot 4b^2 - 5^{b+2} : a$; $a = 25$, $b = 1$. [95]

130 $3b^2 : (a^2 - 1) + (3b - 5a - 2)^2 : (b - a)$; $a = 2$, $b = 5$. [28]

Dalle parole ai simboli

ESEMPIO

Scriviamo la frase seguente in simboli e calcoliamone il valore per $a = 3$ e $b = 2$.

«Moltiplica la somma tra a e il doppio di b per il successivo del quadrato di a .»

«Moltiplica la somma... $\rightarrow (\dots + \dots) \cdot \dots$

...tra a e il doppio di b ... $\rightarrow (a + 2 \cdot b) \cdot \dots$

...per il successivo... $\rightarrow (a + 2 \cdot b) \cdot (\dots + 1)$

...del quadrato di a » $\rightarrow (a + 2 \cdot b) \cdot (a^2 + 1)$

Sostituiamo i valori $a = 3$ e $b = 2$: $(a + 2 \cdot b) \cdot (a^2 + 1) \rightarrow (3 + 2 \cdot 2) \cdot (3^2 + 1)$.

Semplifichiamo l'espressione: $(3 + 2 \cdot 2) \cdot (3^2 + 1) = (3 + 4) \cdot (9 + 1) = 7 \cdot 10 = 70$.

1 NUMERI NATURALI

Scrivi in forma simbolica le frasi seguenti e poi calcolane il valore per i numeri indicati.

131 Sottrai al doppio di n la sua quarta parte; $n = 20$,
 $n = 28$. [35; 49]

132 Aggiungi al quadruplo di a il quintuplo di b ;
 $a = 6$ e $b = 10$, $a = 5$ e $b = 2$. [74; 30]

133 Sottrai il triplo di x dalla terza parte di y ; $x = 2$ e
 $y = 30$, $x = 1$ e $y = 15$. [4; 2]

134 Dividi la somma tra s e t per il successivo di t ;
 $s = 5$ e $t = 3$, $s = 1$ e $t = 9$. [2; 1]

135 A b aumentato di 2 aggiungi la differenza dei cubi
di c e b ; $c = 2$ e $b = 0$, $c = 4$ e $b = 3$. [10; 42]

136 Dividi la somma tra x e y per la differenza dei
quadrati di y e x ; $x = 2$ e $y = 3$, $x = 4$ e $y = 5$.
[1; 1]

137 Al quadruplo di x sottrai la differenza tra x e y
aumentata di 2; $x = 8$ e $y = 2$, $x = 10$ e $y = 8$.
[24; 36]

138 **ESEMPIO DIGITALE** Moltiplica il quadrato della
differenza tra a e b per la differenza dei quadrati
di a e b diminuita di 2; $a = 5$ e $b = 4$, $a = 6$ e
 $b = 3$.

139 Moltiplica il prodotto di a e b per il rapporto tra
il triplo di a e la metà di b ; $a = 2$ e $b = 4$, $a = 1$ e
 $b = 6$. [24; 6]

140 Sottrai al triplo prodotto tra a e il suo successivo
il quadrato di x ; $a = 2$ e $x = 4$, $a = 5$ e $x = 5$.
[2; 65]

141 Dividi il prodotto tra a e il doppio di b per la
somma tra a e il triplo di b ; $a = 11$ e $b = 0$, $a = 2$
e $b = 2$. [0; 1]

142 Eleva al quadrato la differenza tra il triplo di x e
il successivo del doppio di y ; $x = 2$ e $y = 1$,
 $x = 3$ e $y = 4$. [9; 0]

Dai simboli alle parole

Per ogni espressione scrivi la frase che la descrive.

143 **ESEMPIO DIGITALE** $a^3 \cdot (3b + 1)$

145 $2xy - y^3 : 3$; $3a : 4b + 1$.

144 $(n + 1)^2$; $[a(a - 1)]^3$.

146 $(a^3 + x^3)^2$; $(a^2 - b^2) : 2$.

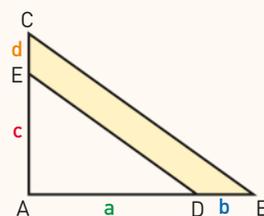
Dall'immagine ai simboli

Scriviamo l'espressione letterale che corrisponde alla misura dell'area
colorata e calcoliamone il valore per $a = 27$, $b = 9$, $c = 18$, $d = 6$.

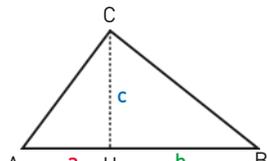
ESEMPIO
$$\frac{[(a + b) \cdot (c + d)] : 2 - (a \cdot c) : 2}{\text{area (ABC)} \quad \text{area (ADE)}} \rightarrow \frac{[(27 + 9) \cdot (18 + 6)] : 2 - (27 \cdot 18) : 2}{a = 27, b = 9, c = 18, d = 6}$$

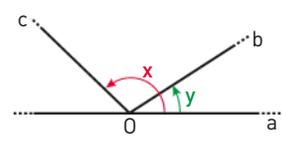
Calcoliamo il valore dell'espressione ottenuta:

$$[(27 + 9)(18 + 6)] : 2 - (27 \cdot 18) : 2 = [36 \cdot 24] : 2 - 486 : 2 = 432 - 243 = 189.$$

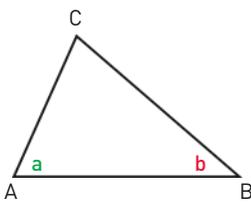


Scrivi l'espressione letterale che corrisponde alla grandezza richiesta e calcolane il valore per i numeri indicati.

147  area (ABC)?
area (HBC)?
 $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$. [16; 10]

148  $c\hat{O}b$?
 $\hat{x} = 145^\circ$, $\hat{y} = 32^\circ$. [113]

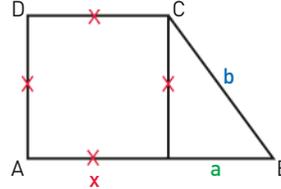
149



$\widehat{C}?$
 $\widehat{a} = 66^\circ, \widehat{b} = 41^\circ.$

[73]

150



perimetro (ABCD)?
 area (ABCD)?
 $x = 4, a = 3, b = 5.$
 [20; 22]

2. PROPRIETÀ DELLE OPERAZIONI

→ Teoria a pagina 4

Operazioni interne in un insieme

151 **VERO O FALSO?** Considera un numero naturale a diverso da 0.

- | | | | |
|---|---|---------------------------------|---|
| a. $0 - a$ è un numero naturale. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F | d. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| b. 0 è l'elemento neutro della moltiplicazione. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F | e. $0 : a$ è impossibile. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| c. $a - a = 0.$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F | f. $a : a = a.$ | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |
| | | g. a^a è un numero naturale. | <input type="checkbox"/> V <input type="checkbox"/> F |

152 **COMPLETA** inserendo il numero corretto ($a, b \in \mathbb{N}$).

- a. $0 \cdot 5 = \square$; $\square \cdot 13 = 13$; $6 + \square = 6$; $0 + \square = 15.$
 b. Se $a \cdot 2 = 0$, allora $a = \square.$
 c. Se $a \cdot b = 0$ e $a = 7$, allora $b = \square.$
 d. Se $a = 0$, allora $a \cdot b = \square.$

Proprietà delle operazioni

153 **INVALSI 2004** Siano m e n due numeri naturali diversi da zero. Se si scambia m con n , quale delle seguenti espressioni modifica il proprio valore?

- A $m + n$ B $m \cdot n$ C m^n D $m^0 - n^0$

Indica quali proprietà delle operazioni sono state applicate nelle seguenti uguaglianze.

- | | |
|--|--|
| 154 $36 + 19 = 19 + 36$ | 165 $(45 - 15) : 3 = 45 : 3 - 15 : 3$ |
| 155 $2 \cdot 5 + 1 = 1 + 5 \cdot 2$ | 166 $22 \cdot (5 + 4) = 22 \cdot 5 + 22 \cdot 4$ |
| 156 $23 - 5 = (23 - 3) - (5 - 3)$ | 167 $(12 \cdot 4) \cdot 25 = 12 \cdot (4 \cdot 25)$ |
| 157 $(13 + 25) + 3 = 13 + (25 + 3)$ | 168 $(18 + 4) \cdot 2 = 18 \cdot 2 + 4 \cdot 2$ |
| 158 $3 \cdot 15 = 15 \cdot 3$ | 169 $88 - 3 \cdot 5 = 88 - 5 \cdot 3$ |
| 159 $(5 + 1) + 8 = 5 + 9$ | 170 $81 - 74 = (81 - 1) - (74 - 1)$ |
| 160 $(12 + 7) + 4 = 4 + (12 + 7)$ | 171 $(6 \cdot 13) : (3 \cdot 13) = 6 : 3$ |
| 161 $16 \cdot (2 + 5) = (2 + 5) \cdot 16$ | 172 $3 \cdot 14 + 3 \cdot 5 = 3 \cdot (14 + 5)$ |
| 162 $(18 + 3) : 3 = 18 : 3 + 3 : 3$ | 173 $11 \cdot 3 \cdot 5 = 11 \cdot 15$ |
| 163 $23 + (15 + 2) = (23 + 15) + 2$ | 174 $19 - 6 = 20 - 7$ |
| 164 $100 : 20 = (100 : 10) : (20 : 10)$ | 175 $400 : 20 = 40 : 2$ |

1 NUMERI NATURALI

176 VERO O FALSO?

- a. $(7 + 11) \cdot 3 = 11 \cdot 3 + 7 \cdot 3$ V F
- b. $30 : (2 + 3) = 30 : 2 + 30 : 3$ V F
- c. $20 - 15 = (20 : 5) - (15 : 5)$ V F
- d. $14 + (1 + 6) = (14 + 1) + (14 + 6)$ V F
- e. $25 + 2 \cdot 6 = 6 \cdot 2 + 25$ V F

177 TEST Una delle seguenti uguaglianze è falsa (non è stata applicata correttamente la proprietà invariantiva). Quale? Motiva la risposta.

- A $10 - 8 = 12 - 10$
- B $80 : 4 = 40 : 2$
- C $60 : 4 = 64 : 8$
- D $150 : 25 = 600 : 100$

178 **AL VOLO** Calcola nel modo più veloce possibile il risultato delle seguenti operazioni, indicando quali proprietà delle operazioni applichi.

- a. $38 + 11 + 16 + 21$; $22 \cdot 25$.
- b. $55 \cdot 57 + 57 \cdot 23 + 57 \cdot 22$; $21100 : 25$.
- c. $28 \cdot 50$; $20 \cdot 67 \cdot 5$.
- d. $143 - 15$; $40 \cdot 12 \cdot 50$.

179 **COMPLETA** le seguenti uguaglianze e indica la proprietà applicata.

- a. $16 - 7 = (\square - 6) - (7 - \square)$.
- b. $13 \cdot \square \cdot 4 = \square \cdot (5 \cdot \square)$.
- c. $\square \cdot (5 + 8) = 11 \cdot \square + 11 \cdot \square$.
- d. $5 \cdot \square + 5 \cdot 18 = \square \cdot (2 + \square)$.
- e. $(11 + 6) + \square = \square + (6 + 44)$.

180 **CACCIA ALL'ERRORE** a. $1750 : 25 : 5 = 1750 : 5 = 350$; b. $(16 \cdot 4) : 2 = (16 : 2) \cdot (4 : 2) = 8 \cdot 2 = 16$;
c. $5 \cdot (3 \cdot 2) = (5 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 2) = 15 \cdot 10 = 150$; d. $30 : (3 + 2) = 30 : 3 + 30 : 2 = 10 + 15 = 25$.

Divisione con resto

Determina quoziente e resto delle seguenti divisioni.

181 $15 : 2$; $34 : 5$; $37 : 11$.

182 $102 : 10$; $156 : 13$; $335 : 25$.

183 **COMPLETA** la seguente tabella inserendo il numero opportuno.

Dividendo	Divisore	Quoziente	Resto
46	4	<input type="text"/>	<input type="text"/>
<input type="text"/>	6	5	2
202	<input type="text"/>	15	7
567	<input type="text"/>	25	17

184 VERO O FALSO? Se $x : y = 5$ con resto 3, allora:

- a. $5 \cdot x + 3 = y$. V F
- b. $5 \cdot y + 3 = x$. V F
- c. anche $(x \cdot 2) : (y \cdot 2) = 5$ con resto 3. V F
- d. $(x \cdot 4) : (y \cdot 4) = 5$ con resto 7. V F
- e. $(x : 3) : (y : 3) = 5$ con resto 1. V F
- f. $(x + 5) : (y + 5) = 5$ con resto 8. V F

Criteri di divisibilità

Stabilisci quali dei seguenti numeri sono divisibili per il numero indicato a fianco.

185 166, 720, 2871, 3974, 4516.

189 1560, 2475, 3283, 5554, 5733.

186 2153, 3927, 4128, 4949, 6216.

190 1151, 2022, 3234, 4481, 5786.

187 1964, 2268, 3302, 5376, 5849.

191 1020, 2200, 3025, 4330, 5156.

188 1036, 1215, 1373, 1442, 2545.

192 Stabilisci se i numeri 396, 999, 2028, 3950 sono divisibili per 2, 3, 4, 5, 9, 11, 25.

193 **INTORNO A NOI** Manuel è un po' distratto e, mentre fa i compiti, cancella in un'espressione una cifra scritta male, ma dimentica di riscriverla. Il giorno dopo si accorge della dimenticanza, ma non ricorda la cifra mancante; ricorda solo che il risultato dell'addizione è divisibile per 9. Aiuta Manuel trovando la cifra.

$$11 \text{ } \ominus \text{ } 5 + 132$$

3. PROPRIETÀ DELLE POTENZE ➔ Teoria a pagina 8

194 **TEST** $(2 \cdot 5^2 \cdot 3^3)^3 =$

- A** $6 \cdot 5^5 \cdot 3^6$ **C** $8 \cdot 5^6 \cdot 3^9$
B $2 \cdot 5^6 \cdot 3^9$ **D** $8 \cdot 5^5 \cdot 3^6$

195 **INVALSI 2006** Quale delle seguenti espressioni rappresenta il doppio di 2^{16} ?

- A** 2^{17} **B** 2^{32} **C** 4^{16} **D** 4^{32}

196 **INVALSI 2012** La decima parte di 10^{20} è:

- A** 10^{10} **B** 1^{20} **C** 100 **D** 10^{19}

197 **TEST** Qual è il quadruplo di 2^{30} ?

- A** 2^{120} **B** 2^{60} **C** 2^{34} **D** 2^{32}

198 **TEST** La quarta parte del cubo di 4 è:

- A** 16. **B** 4^4 . **C** 4. **D** 4^3 .

Calcola il risultato delle seguenti espressioni, indicando le proprietà delle potenze utilizzate.

199 $15^4 : 5^4$; $2^2 \cdot 2^4$.

200 $7^{14} : 7^{12}$; $2^3 \cdot 3^3$.

201 $(4^2)^3 : 4^4$; $(4^2)^3 : (2^3)^2$.

202 $(8^3)^2 : 4^6$; $(5^2)^2 \cdot 2^4$.

203 $(11^5 : 11^4)^2$; $[(2^{11})^0]^3$.

204 $(5 \cdot 5^6)^2 : (5^2 \cdot 5^4)^2$; $(13^3)^4 : 13^{10}$.

205 $(9^4 \cdot 10^4) : (90 \cdot 90^2)$; $[3^4 \cdot (3^2)^3] : [(3^5)^2]^3$.

206 $(5^{400} : 5^{300}) : [(5^{25})^2 \cdot 5]$; $[(3^{11} \cdot 3^9) : 3^{19}]^2$.

207 $(6^{12} : 6^{10})^5 : (6^2 \cdot 6^3)^2$; $(10^3 : 10) \cdot [(10^2)^3 : 10^5]$.

208 $(2^2 \cdot 7^2) : [14^5 : (28^4 : 2^4)]$; $4^5 \cdot 25^5 : 5^5 : 20^5$.

COMPLETA le seguenti uguaglianze.

209 $5^8 \cdot 5^{\square} = 5^{16}$; $7^7 \cdot \square^7 = 14^7$.

210 $4^6 \cdot \square = 4^9$; $(6^{\square})^3 = 6^6$.

211 $10^5 : \square^5 = 2^5$; $20^{\square} : 20^{15} = 20^{11}$.

212 $12^5 \cdot 12^{\square} = 12^5$; $[(2^5)^{\square}]^3 = 2^{30}$.

213 $9^{12} : 9^{\square} = 1$; $8^4 : \square^4 = 8^4$.

214 $\square^7 : 5^7 = 7^7$; $\square^{30} \cdot 11^{30} = 33^{30}$.

215 $21^3 : \square = 3^3$; $8^2 \cdot 4^2 \cdot \square^2 = 64^2$.

216 **VERO O FALSO?**

- a.** $8^3 : 2^3 = 4^3$ **V** **F** **d.** $6^2 \cdot 6^6 = 6^8$ **V** **F**
b. $5^3 \cdot 2^3 = 10^6$ **V** **F** **e.** $10^3 - 10^2 = 10$ **V** **F**
c. $[(3^2)^0]^4 = 0$ **V** **F**

217 **CACCIA ALL'ERRORE**

- a.** $5^3 + 5^4 = 5^7$ **d.** $7^3 \cdot 2^3 = 14^9$
b. $8^{10} : 8^2 = 8^5$ **e.** $13^2 \cdot 13^0 \cdot 13^4 = 1$
c. $(6^5)^2 = 6^7$ **f.** $3^{12} - 3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^4 = 3$

TEST ($n \in \mathbb{N}$)

218 $7 \cdot 7^n =$

- A** 7^n **B** 7^{n+1} **C** 1 **D** 7

219 $(8^2)^n =$

- A** 8^{2+n} **B** 8^{2n} **C** $8^{2 \cdot n}$ **D** 8^{n^2}

220 $3^5 \cdot n^5 =$

- A** $(3 \cdot n)^{25}$ **C** $(3 \cdot n)^5$
B $(3 \cdot n)^{10}$ **D** $(3 \cdot n)^0$

1 NUMERI NATURALI

221  **INVALSI 2005** $2^3 + 2^6 =$
A 2^9 **B** 2^{18} **C** 4^9 **D** $9 \cdot 2^3$

Considera a, b, c numeri naturali. Indica quali proprietà delle operazioni e delle potenze giustificano le seguenti uguaglianze. Verifica poi ciascuna di esse per i valori indicati a fianco.

222 $a^4 : a^2 = a^2; \quad a = 2.$

223 $(a^b)^c = a^{bc}; \quad a = 2, b = 3, c = 2.$

224 $a^2 : b^2 = (a^2 \cdot c) : (b^2 \cdot c); \quad a = 3, b = 6, c = 2.$

225 $a^2 \cdot a^b \cdot a^3 = a^{5+b}; \quad a = 2, b = 3.$

226  **INVALSI 2006** $(5^9 : 5^4) : 5^3 + 5^2 =$
A 1 **B** 5^4 **C** 10^2 **D** 50

 **CHECKER** Semplifica le seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

227 $2^2 \cdot 2^3 - 2^4 : 2^2 + 2^1$ [30] **237** $[(2 + 1)^4 \cdot 2^7 \cdot 3^3] : (6^{10} : 6^8)^3 - 6$ [0]

228 $5^7 : 5^4 - 5^2 \cdot 5^0 - 10^2$ [0] **238** $(3^3)^6 : (3^3)^2 \cdot [(3^2)^7 : (3^4)^2] : (3^3)^5$ [27]

229 $(3^5 \cdot 3^2) : 3^4 + 3^2 \cdot 3^0 - 3^7 : 3^4$ [9] **239** $5^3 \cdot [(5^2)^4 : 5] : [(5^2)^3 \cdot (5^2)^2]$ [1]

230 $(5 \cdot 5^2)^3 : 5^7 \cdot 5^0 - 5^4 : 5^2$ [0] **240** $[(2^3)^3]^3 : \{[(4^2)^3]^2 : 4\}$ [32]

231 $(3^2 \cdot 7^3)^0 + (6^3)^2 : 6^4 - 3^3$ [10] **241** $[(2^2)^3]^2 : [(2^5 \cdot 2^5) : (2^4 \cdot 2^0)] - 8^2$ [0]

232 $(2^6 : 2^4) \cdot 2^3 - (5^3 : 5^3) \cdot (3^2 \cdot 3)$ [5] **242** $[(4^3 + 6^2) : (5^6 : 5^3 : 5) + (2 \cdot 3^3 - 7^2)]^2$ [81]

233 $[(6^4 : 3^4)^2 : (14^2 : 7^2)^3]^2$ [16] **243** $\{[(8^2 \cdot 4^3) : (2^3)^3] : (32^2 : 8^3)\} : (8^4 : 4^3 : 2^5)$ [2]

234 $[(3^3 + 3^0) : 7 + 2^4]^2 : 10^2$ [4] **244** $(3^2 - 2^2) \cdot (25^2 : 5^3) + 14^3 : 7^3 : 2 : 4$ [26]

235 $(3^5 \cdot 2^5) : 6^3 : (2 \cdot 2^3 : 2^2)$ [9] **245** $(3^2)^5 : 3^8 \cdot 3 - [(5^2)^5 : 5^8 : 5]^2 + 3[(5^4 : 5)^0]^5$ [5]

236 $[(2^6 : 2^5)^3 : 2^2 \cdot 2^4 - 2] : (3 \cdot 5)$ [2] **246** $\{7^5 \cdot 7^3 : 7^6 + [2^0 + (3^2)^3 - 3^5 \cdot 3]^3 : 25^3$ [8]

247  **ESEMPIO DIGITALE** $64^4 : (2^2 \cdot 4^2)^3 - [(12^5 : 3^5) \cdot 4] : 16^2$

248 $(5^2 : 5)^2 - [2^0 \cdot (8^3 : 4^2) - (4 \cdot 7 - 5^2) \cdot (3^4 : 3^3)]$ [2]

249 **AL VOLO** $(5^3 \cdot 5 \cdot 5^{10} \cdot 5^{12} \cdot 5^6) : (5^8 \cdot 5^{10} \cdot 5^{12}) + [(18^7)^2 : 18^3]^0$ [26]

250 $3^2 + 6^2 : 3^2 - (4 + 2^3) : \{5 - [(5^3)^2]^0 + 14^3 : 7^3\}$ [12]

251 $(25 \cdot 5^3)^4 : [(10^3 : 2^3)^3]^2 \cdot 5^4 - (15^3)^2 : [(4^2 - 13)^2]^3$ [0]

252 $\{[(3^2 + 9^2) : 3^2]^3 \cdot 10^2\} : \{[(4^3)^4 : (4^2)^5 - 11]^1\}^5 - 18^0$ [31]

253 $[(13^4 : 13^2 - 10^2 + 1) : 7 - 7]^2 + [(13^3 \cdot 13^2)^0]^3 \cdot \{[(13 + 7) : 10]^2\}^2$ [25]

254 $9^4 : 3^4 - \{[(3^2 \cdot 2 - 7)^3 : 11] : [2^2 \cdot 6^2 - (5^2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 11)]\}$ [70]

255 $[(5^{12} : 5^7 : 5^3) \cdot (2^{15} : 4^5 : 2^2) : 10^2] \cdot \{7^{30} : [(7^2)^3]^4 : 49^2 - 10 \cdot 7 : 2\}$ [28]

MATEMATICA INTORNO A NOI

Scambio libri



Anna, Bianca e Carla organizzano una catena di scambio libri...

-  ▶ Problema e risoluzione.
- ▶ 2 esercizi in più.

Traduci le seguenti frasi in simboli e semplifica le espressioni applicando le proprietà delle potenze.

256 Dividi il prodotto tra il quadrato e il cubo di 25 per la quinta potenza di 5. [5⁵]

257 Somma al doppio del quadrato di 2 la metà del rapporto tra il quadrato del cubo di 2 e 32. [9]

4. MULTIPLI, DIVISORI, MCD, mcm Teoria a pagina 10

Multipli e divisori

258  **TEST** L'intrusa Le seguenti espressioni riguardanti due numeri naturali a e b sono tutte tra loro equivalenti tranne una. Quale?

- A** « a è multiplo di b ».
- B** « a divide b ».
- C** « b divide a ».
- D** « b è divisore di a ».
- E** « a è divisibile per b ».

259  **VERO O FALSO?**

- a.** Ogni numero diverso da 0 è divisore di 0. **V** **F**
- b.** 0 non è divisore di nessun numero. **V** **F**
- c.** I numeri multipli di 12 sono divisibili per 2 e per 3. **V** **F**
- d.** Se un numero è multiplo di 7, allora è dispari. **V** **F**

260  **VERO O FALSO?**

- a.** Se un numero è divisibile per 9, lo è anche per 3. **V** **F**
- b.** Se un numero è divisibile per 4 e per 9, lo è anche per 18. **V** **F**
- c.** Se un numero è divisibile per 2, i suoi multipli sono divisibili per 4. **V** **F**
- d.** Se un numero è multiplo di 2 e di 4, allora è divisibile per 8. **V** **F**
- e.** Un numero pari multiplo di 3 è divisibile per 6. **V** **F**

261 Scrivi tutti i divisori dei seguenti numeri.

16

25

34

66

262 Scrivi i primi cinque multipli dei seguenti numeri.

6

11

15

16

Stabilisci quali dei seguenti numeri sono divisibili per quello indicato a fianco.

263  **ESEMPIO DIGITALE**

466, 1308, 2502, 5248.

12

265 1548, 2124, 2634, 5445.

18

264 1113, 2460, 3115, 4339.

15

266 1122, 1458, 2354, 3267.

99

267 Scrivi i multipli di 6 maggiori di 15, minori di 50 e divisibili per 9.

269 **EUREKA!** **Quante cifre!** Stabilisci se il numero $10^{14} - 1$ è divisibile per 99.

268 **INTORNO A NOI** **Compito per casa** Devo svolgere 21 espressioni numerate da 1 a 21 in 3 giorni. Se il primo giorno svolgo gli esercizi contrassegnati da un numero multiplo di 3 e il secondo gli esercizi contrassegnati da un numero multiplo di 7, quanti esercizi mi rimangono da fare?

270  **EUREKA!** **Numeri e cartoncini** Hai 18 cartoncini su ciascuno dei quali sta scritto un solo numero: 4 oppure 5. La somma di tutti i numeri sui cartoncini è divisibile per 17. Su quanti cartoncini è scritto il numero 4?

- A** 4
- B** 5
- C** 6
- D** 7
- E** 9

[12]

[Kangourou Italia, 2010]

271 **INVALSI 2011** In un torneo di calcio fra scuole una squadra guadagna 3 punti se vince, 1 punto se pareggia e nessun punto se perde. Una squadra ha vinto tante partite quante ne ha pareggiato. Quale dei seguenti punteggi *non* può aver totalizzato la squadra?

- A** 24 **B** 28 **C** 30 **D** 32

272 **EUREKA!** **Numeri pari superstiti!** Luca scrive sulla lavagna tutti i numeri pari consecutivi da 2 a 2010 (compresi). Poi Giovanni cancella tutti i numeri che sono multipli di 3. Quanti numeri rimangono?

- A** 670 **B** 710 **C** 840 **D** 905 **E** 1005

[Giochi di Archimede, 2010]

Scomposizione in fattori primi

273 **VERO O FALSO?**

- a.** 2^3 è un numero primo. **V** **F**
b. I numeri primi sono tutti dispari. **V** **F**
c. Il prodotto tra due numeri primi non è mai un numero primo. **V** **F**
d. 2 è il primo numero primo. **V** **F**

274 **INVALSI 2011** Considera l'affermazione «Per ogni numero naturale n , $2^n + 1$ è un numero primo». Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.

275 **EUREKA!** **Una sola è falsa** Una sola tra le seguenti affermazioni relative ai numeri primi è *falsa*. Quale?

- A** La somma di due numeri primi può essere un numero primo.
B La somma di tre numeri primi non può essere un numero primo.
C La differenza fra due numeri primi distinti può essere un numero primo.
D Il prodotto di due numeri primi non è mai un numero primo.

MATEMATICA AL COMPUTER

I numeri di Fibonacci

Nella successione di Fibonacci:

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 ...

ogni numero (a parte i primi due 1) è ottenuto dalla somma dei due numeri che lo precedono.

Wiris ti aiuta a scoprirne le proprietà.

- ▶ Problema e risoluzione.
 ▶ 6 esercizi in più.

Scomponi in fattori primi i seguenti numeri.

276 **ESEMPIO DIGITALE** 1500; 312; 7250; 4096.

277 44; 60; 64; 102.

278 52; 72; 85; 98.

279 120; 169; 208; 759.

280 117; 429; 608; 1728.

281 1580; 2040; 2205; 4096.

282 1792; 1815; 5720; 8820.

CHECKER Utilizzando la scomposizione in fattori primi e le proprietà delle potenze, semplifica le seguenti espressioni.

283 $110^3 : (121 \cdot 125)$ [88] **285** $[(51 \cdot 4)^3 : 68^2] : 6^2$ [51]

284 $(169 \cdot 308) : (77 \cdot 26)$ [26] **286** $68^2 : (34 \cdot 8) - 45 : (270^2 : 1620)$ [16]

Utilizzando la scomposizione in fattori primi, stabilisci se i seguenti numeri sono divisibili per quelli indicati a fianco.

287 2160; 32, 24, 360, 150. **288** 2925; 39, 195, 1125, 1755. **289** 5040; 144, 432, 560, 1680.

Modifica le seguenti scomposizioni in modo che ogni fattore sia la potenza di un numero primo.

290 $18 \cdot 3$; $8 \cdot 5$; $21 \cdot 14$; $16 \cdot 24$.

292 $15 \cdot 30 \cdot 4$; $2 \cdot 11 \cdot 22$; $9 \cdot 3^3 \cdot 81$; $2^2 \cdot 5 \cdot 100$.

291 12^4 ; $6 \cdot 5 \cdot 2$; $34 \cdot 17^2$; $7 \cdot 5 \cdot 20$.

293 $13^2 \cdot 69^3$; $121 \cdot 11^2 \cdot 3$; $17 \cdot 13 \cdot 26$; $49^3 \cdot 14$.

MCD e mcm

Determina MCD e mcm dei seguenti gruppi di numeri utilizzando la scomposizione in fattori primi.

294 **AL VOLO** 30, 4; 36, 8; 33, 22.

297 **ESEMPIO DIGITALE** 240, 150, 54.

295 10, 14, 20; 12, 20, 24; 16, 64, 128.

298 15, 150, 60; 4, 8, 1300; 20, 16, 100.

296 6, 12, 15; 14, 6; 77, 121.

299 26, 52, 130; 30, 60, 500; 30, 66, 111.

300 65, 130, 910; 84, 840, 1080; 12, 120, 600, 720.

301 56, 210, 280, 1680; 45, 81, 270, 648; 9, 48, 108, 216, 648.

Determina il MCD dei seguenti gruppi di numeri utilizzando gli algoritmi di Euclide delle sottrazioni successive e delle divisioni successive. Determina poi il mcm utilizzando la formula che lo lega al MCD.

302 4, 16; 15, 20; 22, 7.

304 56, 70; 72, 99; 45, 300.

303 20, 40; 32, 44; 35, 72.

305 10, 1000; 60, 1500; 5, 1080.

▶ LABORATORIO

MATEMATICA E STORIA

Divisione e resto nella Firenze del '300

Paolo dell'Abaco, matematico, astronomo e poeta italiano del '300, scrisse il *Trattato d'Aritmetica*, da cui è ricavato questo problema:

«Trova uno numero che partito per 2 ne rjmanghj uno, e partito per 3 ne rjmanghj 2, e partito per 4 ne rjmanghj 3, e partito per 5 ne rjmanghj 4, e coxj per insino in 10».

a. Ecco come dell'Abaco risolve il problema (completa il testo):

«Moltiplica 2 per 3 che fa 6, 4 per 6 che fa 24, 5 per 24 che fa 120, 6 per che fa, 7 per che fa, 8 per che fa, 9 per che fa, 10 per che fa Ora puoi dire: ho trovato un numero che diviso per 2 dà resto ..., per 3 dà resto ..., e così per 4, per 5, per 6, fino a 10. E ora di: sottraendo 1 da quel numero [ne troverò un altro che] diviso per 2 dà resto ..., per 3 dà resto ..., per 4 dà resto ... e così via».

b. Il numero che si ottiene col ragionamento di dell'Abaco non è l'unica soluzione del problema, trovane almeno altre due.



Ambrogio Lorenzetti, *Effetti del Buon Governo in città* (particolare), affresco su parete (1339 circa), Palazzo Pubblico, Siena.



▶ Risoluzione. ▶ Attività di ricerca: Scuole d'abaco e società.

5. SISTEMI DI NUMERAZIONE

→ Teoria a pagina 14

In base dieci

Scrivi la forma polinomiale dei seguenti numeri in base dieci.

316 2; 532; 129; 401; 1002.

317 909; 11 011; 1011; 1111; 2000.

COMPLETA

318 $\square \cdot 10^4 + \square \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^{\square} = 10\,060$; $\square \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^{\square} + \square = 72\,051$.

319 $\square \cdot 10^5 + \square \cdot 10^4 + \square \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^{\square} = 310\,002$; $\square \cdot 10^{\square} + 3 \cdot 10^{\square} + \square \cdot 10 + \square = 50\,324$.

320  **YOU & MATHS** **What number is it?** Below are some descriptions of numbers given by a child who is still learning about decimal positional notation. Rewrite the numbers in correct decimal positional notation.

- Four units and eleven tens.
- Twenty three hundreds and forty units.
- Two thousands, thirty two hundreds, fifty one units.

In altre basi

321 Indica le scritture *non* corrette.
 $(5100)_6$; $(2000)_2$; $(1012)_3$; $(139)_{16}$; $(410)_4$.

322 Scrivi tutte le cifre che si usano nella numerazione in base 5 e in base 12.

323  **VERO O FALSO?**

- In ogni base il numero 10 rappresenta la base.
- Nella base $n < 10$ non compare mai la cifra n .
- In qualunque base a il quadrato della base si scrive 100.
- Il numero 11 in base a rappresenta il successivo di a .

V F

V F

V F

V F

324 Scrivi in base 2 i primi cinque numeri naturali.

325 Scrivi in base 3 i primi nove numeri naturali.

Scrivi la forma polinomiale dei seguenti numeri.

326 $(2)_3$; $(2)_4$; $(2)_5$; $(2)_7$.

329 $(230)_4$; $(2122)_4$; $(1011)_2$; $(1100)_2$.

327 $(11)_2$; $(11)_3$; $(11)_6$; $(11)_4$.

330 $(1022)_4$; $(11\,001)_2$; $(2110)_3$; $(2001)_4$.

328 $(101)_2$; $(101)_3$; $(100)_3$; $(120)_3$.

331 $(AB1)_{16}$; $(2BA)_{16}$; $(144)_5$; $(1001)_8$.

332  **VERO O FALSO?**

- In un sistema a base 8 si utilizzano come cifre i numeri naturali minori o uguali a 8.
- 104 non può rappresentare un numero in base 4.
- In base 3 il numero 3 si scrive 10.
- In base 16 il numero 100 rappresenta 16^2 .

V F

V F

V F

V F

1 NUMERI NATURALI

Scrivi in base dieci i seguenti numeri.

333 $(110)_2$; $(1011)_2$; $(1111)_2$.

336 $(440)_5$; $(100)_5$; $(411)_5$.

334 $(101)_3$; $(2222)_3$; $(1020)_3$.

337 $(10)_{12}$; $(AB)_{12}$; $(1AB)_{12}$.

335 $(121)_4$; $(321)_4$; $(100)_4$.

338 $(1\ 100\ 011)_2$; $(1200)_8$; $(188)_9$.

339 **EUREKA!** **Due basi** Del numero naturale x si sa che rispetto alla base a la sua scrittura è 12; rispetto alla base b è invece 23. Quale tra le seguenti affermazioni è *falsa*?

- A** La base a è maggiore della base b . **C** La base a può essere 6.
B Esistono infinite coppie possibili di basi a e b che soddisfano le ipotesi. **D** Se $b = 4$, allora $a = 9$.

Da base dieci a base diversa

ESEMPIO

Scriviamo il numero 147, espresso in base dieci, in base 4.

Eseguiamo divisioni ripetute, mettendo in evidenza i resti, fermandoci quando il quoziente è 0.

I resti, letti nella direzione della freccia, sono le cifre cercate:

$147 = (2103)_4$.

Scrivi i seguenti numeri espressi in base dieci nella base indicata a fianco.

340 7, 10, 11, 31, 33, 128. **base 2**

344 21, 28, 43, 100, 1002. **base 2**

341 5, 16, 18, 22, 33, 40. **base 3**

345 35, 47, 87, 103, 201. **base 3**

342 6, 12, 17, 19, 21, 44. **base 4**

346 52, 67, 93, 104, 1200. **base 4**

343 11, 25, 27, 30, 100, 126. **base 5**

347 380, 438, 805, 901, 1020. **base 5**

Da una base all'altra

348 Scrivi in base due i numeri $(100)_3$, $(11)_4$, $(10)_{16}$, $(11)_5$.

COMPLETA

- 349** a. $(111)_2 = (\quad)_4$;
 b. $(103)_4 = (\quad)_3$;
 c. $(AB)_{16} = (\quad)_4$;
 d. $(2001)_3 = (\quad)_2$;
 e. $(1111)_2 = (\quad)_5$.

- 350** a. $(1010)_2 = (\quad)_{16}$;
 b. $(403)_5 = (\quad)_2$;
 c. $(1011)_3 = (\quad)_4$;
 d. $(11011)_2 = (\quad)_7$;
 e. $(CDA)_{16} = (\quad)_4$.

Operazioni in altre basi

ESEMPIO

a. Costruiamo la tabella di addizione in base 3 e calcoliamo $(221)_3 + (20)_3$.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

$$\begin{array}{r} 1 \\ 221+ \\ 20 \\ \hline 1011 \end{array}$$

$2 + 1 = 3 \rightarrow (3)_{10} = (10)_3$

b. Costruiamo la tabella di moltiplicazione in base 3 e calcoliamo $(201)_3 \cdot (12)_3$.

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

$$\begin{array}{r} 201 \cdot \\ 12 \\ \hline 1102 \\ 201- \\ \hline 10112 \end{array}$$

$2 \cdot 2 = 4 \rightarrow (4)_{10} = (11)_3$

351 Costruisci le tabelle di addizione e moltiplicazione in base 4 e calcola:

- a. $(301)_4 + (1002)_4$; b. $(103)_4 \cdot (12)_4$.

352 **COMPLETA** le uguaglianze in base 4 utilizzando le tabelle di addizione e moltiplicazione in base 4.

- a. $11 + \square = 31$; c. $3 \cdot \square = 30$; e. $20 : 10 = \square$;
 b. $12 - 3 = \square$; d. $13 \cdot 10 = \square$; f. $\square : 3 = 12$.

Esegui le seguenti operazioni utilizzando le tabelle di addizione e moltiplicazione della base indicata.

353 $1010 + 101$, $1100 + 1111$, $1110 + 111 + 1000$, $11 \cdot 101$, $1101 \cdot 100$, $1011 \cdot 111$. base 2

354 $102 + 122$, $1012 + 12$, $101 + 1122$, $222 \cdot 101$, $201 \cdot 220$, $20 \cdot 111$. base 3

355 $13 + 1102$, $1312 + 2011$, $1123 + 1033$, $13 \cdot 101$, $133 \cdot 201$, $102 \cdot 333$. base 4

356 Costruisci le tabelle di addizione e moltiplicazione in base 5 e calcola:

- a. $12 + 4$;
 b. $12 \cdot 4$;
 c. $110 + 14$;
 d. $123 \cdot 31$.

357 In quale base è stata eseguita l'operazione?
 $233 + 414 = 1202$

Semplifica le espressioni.

358 $(101 + 10) \cdot 110 + 11 \cdot 10$

base 2

359 $[2 \cdot (30 + 103) - 11 \cdot (23)] + 3$

base 4

360 $21 \cdot 22 + [201 \cdot (10 + 21) - 2]$

base 3

Semplifica le seguenti espressioni in base 2 e poi trasforma il risultato in base 10.

361 $(1010 + 10 + 11) - (111 - 10)$

362 $111 \cdot 10 + 110 \cdot 11 - 11$

363 $[(1001 + 111) \cdot 101 - 11] + 110 : 10$

364 $[(1111 - 110) \cdot 10 + (101 + 11) \cdot 11] \cdot 111$

365 $(11 \cdot 111 + 10 \cdot 110) \cdot (110 - 11) + 110$

366 $(11010 - 1100) \cdot 11 - 110 \cdot 101 - 11$

Esegui le operazioni e poi trasforma il risultato in base 10.

367 $(1A3)_{16} - (B2)_{16} + (129)_{16}$

368 $(112)_3 \cdot (12)_3$

369 $(124)_8 \cdot (100)_8 + (117)_8$

370 $(134)_5 - (14)_5 + (44)_5 \cdot (23)_5$

VERIFICA DELLE COMPETENZE ALLENAMENTO

► Competenza 1 (abilità 1, 2)

1 **TEST** Solo una delle seguenti espressioni *non* ha valore 0. Quale?

A $(2^0 - 4^0)^7 - 0^3$

C $[(1 - 3^0)^0]^2$

B $(16^0 + 3^0 \cdot 2^0)^2 - 8^0 \cdot 4$

D $(5^0 \cdot 5 - 1)^2 - 2^4$

2 **INVALSI 2006** Nell'insieme dei numeri naturali, quale delle seguenti espressioni corrisponde a un quadrato perfetto?

A $3^2 \cdot 2^3 \cdot 5^2$

C $3^2 \cdot 4^3 \cdot 5^2$

B $3^2 \cdot 2^2 \cdot 5^3$

D $3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^2$

3 Scrivi i seguenti numeri in ordine crescente: 8^7 ; 4^5 ; 16^3 ; 256^2 ; 64^4 .

4 **COMPLETA** inserendo i simboli $<$, $=$, $>$ senza calcolare le potenze.

a. 100^2 32^2

c. 36^2 $6^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3$

b. 1600 $2^4 \cdot 10^2$

d. 8^7 128^3

5 **INVALSI 2011** L'espressione $10^{37} + 10^{38}$ è anche uguale a

A 20^{75}

B 10^7

C $11 \cdot 10^{37}$

D $10^{37 \cdot 38}$

✓ CHECKER Calcola il valore delle seguenti espressioni.

6 $\{[(4^3 - 4^2) : 2 - 3 \cdot 7] : 3\}^3 + 3 \cdot 5 - \{[(2^2)^3]^4\}^2 : (4^2 \cdot 4^3)$ [12]

7 $(6^3 \cdot 6^5 \cdot 2^8) : (3^5 \cdot 4^5 : 12^4)^8 + [(7^0)^3]^5 \cdot (3^2 \cdot 2^0 : 3)$ [4]

8 $[(15^3 : 3^3)^2 \cdot 2^6] : [(5^0)^4 \cdot 5]^6 - 3 \cdot (2^2 \cdot 5)$ [4]

9 $(8^3 : 4^3 \cdot 2^5) : (2^4)^2 + (4^3 \cdot 2^3)^4 : (4 \cdot 4^3)^3 - 2^2 \cdot (2^5)^2$ [1]

10 $[(36 : 3^2)^3 : 2^2] \cdot [(36 : 2^2)^3 : 3] : 144 - 144 : (7^0 + 5^2 - 3^2 - 2^0)$ [18]

11 $[21 : 7 \cdot 4 - (2^3 - 2^2)^0 + 26 \cdot 2^2 : 13 - (6 - 2^2 - 9 : 3^2)] : [6 \cdot 4 - 2^4 + (32 : 2^5)^4]$ [2]

12 $13 - 3 \cdot [81 : 3^3 + (3 \cdot 2^2 - 3^2)^3 + 3] : (25 - 2^4 + 2) - 2 \cdot \{2^3 - [6 + (5^2 - 3^2 - 4^2)^5] + 3 \cdot 6\} : 10$ [0]

13 $\{[(72 : 8)^7 \cdot (3^2)^3]^2 : [(75 : 5)^{10} : 25^5]^3\}^2 \cdot (162 : 9^2) : (9^5)^2$ [2]

14 $\{[17^2 - (15^2 + 8^2)]^4 + 8^4 : 4^5 + (3^4 : 3^2 - 1^2)^2\} : [(2^5 - 5^2)^2 - 8^2 : 2]$ [4]

► Competenza 3 (abilità 1, 2)

Traduci le seguenti frasi in simboli e poi calcola il valore delle espressioni ottenute.

15 Dividi per il quadrato di 4 il prodotto tra il quadrato di a e il doppio del cubo di b ; $a = 4$, $b = 2$. [16]

16 Dividi il cubo del quadrato di a per il quadruplo di b e aumenta di 5 il risultato ottenuto; $a = 2$, $b = 8$. [7]

17 A quale potenza di 16 equivale il cubo del cubo del doppio di 8? [9]

18 Determina la metà del quoziente tra il quadrato del cubo del quadruplo di 256 e il cubo del cubo di 64. [32]

19 **INTORNO A NOI** Qual è il numero massimo di braccialetti identici che Martina può confezionare con le perline che ha a disposizione? [45]



20 **TEST** $(201)_3$ equivale a:

A $(11)_{10}$

B $(10010)_2$

C $(11)_{16}$

D $(23)_8$

VERIFICA DELLE COMPETENZE PROVE



PROVA A (10 esercizi)

PROVA B (10 esercizi)

🕒 IN MEZZ'ORA

PROVA C ▶ Competenze 1, 3

🕒 IN UN'ORA

1 VERO O FALSO?

- a. Un numero è divisibile per 21 se è divisibile per 3 o per 7. V F
- b. I multipli di 8 minori di 50 divisibili per 3 sono tre. V F
- c. In una divisione in \mathbb{N} , il quoziente è sempre minore o uguale al dividendo. V F
- d. Nessun multiplo di 2 è un numero primo. V F

2 Semplifica la seguente espressione: $[(2^2)^2 \cdot 2^4] : (2^3)^2 + (3^3)^2 : [(3^4)^3 : (3^5)^2]^2$.

3 Traduci la seguente frase in espressione e calcolane il valore: «Sottrai al prodotto tra il quadrato di 2 e il quadrato di 3 il rapporto tra 45 e la differenza tra 12 e la sua quarta parte».

4 Determina MCD e mcm dei seguenti gruppi di numeri: **a.** 4, 25, 33; **b.** 15, 60, 225.

5 Scrivi in base dieci i numeri $(230)_4$, $(230)_5$, $(230)_8$. Scrivi poi in base 5 il numero che in base dieci è 230.

PROVA D ▶ Competenze 1, 3

🕒 IN UN'ORA

1 **Pasta in più** Pongo su una bilancia digitale un recipiente che contiene della pasta e leggo 320 g sul display. Poiché all'improvviso arrivano degli amici, aggiungo della pasta in modo da quadruplicarne la quantità e leggo 740 g. Quanto pesa il recipiente? Risolvi il problema scrivendo un'espressione e semplificandola.



2 **Dati in salvo** Tre amici decidono di configurare il loro computer personale in modo che esegua automaticamente il backup dei dati.

Anna sceglie di salvare i dati ogni settimana, Barbara ogni quattro giorni, Andrea ogni due settimane. Se il primo salvataggio automatico avviene per tutti venerdì 9 agosto, in quale giorno si verificherà di nuovo l'evento? In quale giorno avverrà il primo salvataggio per Andrea e Anna ma non per Barbara?

3 **INVALSI 2011 Cifre coperte** In ciascuna delle seguenti operazioni una delle cifre è coperta.

1. $50 \blacksquare \times 22 =$ 2. $98 \times 8 \blacktriangledown =$ 3. $143 \blacktriangle \times 4 =$ 4. $3 \times 25 \blacklozenge 3 =$

Rispondi alle domande che seguono mettendo una crocetta per ogni riga.

- | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| a. Quale delle operazioni dà il risultato maggiore? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| b. Quale delle operazioni dà il risultato minore? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| c. Quale delle operazioni dà come risultato un numero dispari? | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

4 Traduci la seguente frase in simboli e calcola il valore dell'espressione ottenuta. «Dividi il cubo del quadrato di 2 per la somma tra il quadrato di 3 e 7.»